JMEA Journal of Modern Educational Achievements
Volume 3, 2024 https://scopusacademia.org/

# Об одном способе преследования по позиции в линейных дифференциальных играх

***А.Т.Рахманов***

*Ташкентский Университет Информационных Технологий, Ташкент, Узбекистан*

В дифференциальной игре участвуют два игрока: первый игрок, так называемый преследователь, и второй игрок, убегающий. В результате возникают две задачи: 1) задача преследования; 2) задача убегания. Преследователь стремится как можно быстрее привести управляемый "объект" на определенное заданное множество, выбирая свое управление $u(t)$ в текущие моменты времени $t \geq 0$, в то время как убегающий противодействует этому, выбирая свое управление $v(t)$. При этом, важную роль играет информация, на основе которой игроки строят свое управление. Для построения управления в каждый момент времени $t \geq 0$ преследователю (убегающему) либо разрешается использовать информацию о текущем положении игроков и значение управления убегающего (преследователя), либо только информацию о текущем положении игроков. В первом случае говорят, что преследование (убегание) осуществляется с дискриминацией убегающего (преследователя), а во втором случае говорят, что преследование (убегание) осуществляется позиционно, то есть без дискриминации убегающего (преследователя).

Задачи преследования и убегания в дифференциальных играх с различными ограничениями на управления и информационными возможностями исследованы во многих работах, например[1-21]. Из них в [4-5] рассматриваются позиционные дифференциальные игры по формализации Н.Н. Красовского, в [11] предложены модификация первого прямого метода преследования без дискриминации убегающего, в [12] решена линейная дифференциальная игра преследования на основе алтернированного интегрирования без дискриминации убегающего игрока, в [6,16,18] получены достаточные условия для возможности завершения преследования по позиции в линейных дифференциальных играх, в [19] предложен один способ убегания по позиции.

Настоящая работа посвящена исследованию и решению задачи преследования для линейных дифференциальных игр, в случае когда управление преследования строится только на основе информации о позициях игроков в определённые моменты времени. Получены достаточные условия завершения преследования из всех начальных положений за конечное время.

Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$ движение преследователя $x$ и убегающего $y$ описываются соответственно следующими уравнениями,

$$\dot{x} = Ax + u \quad , \tag{1}$$

$$\dot{y} = By + v \quad , \tag{2}$$

где $x, y \in R^n$ - фазовое состояние игроков, $A, B-$ постоянные квадратные матрицы порядка $n$, $n \geq 1$, $u \in P$, $v \in Q$ -управляющие параметры преследователя и убегающего соответственно, $P$, $Q$ - компакты из $R^n$. В $R^n$ задано терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где $M_0$- линейное подпространство из $R^n$, $M_1$- подмножество $L$- ортогонального дополнения $M_0$ в $R^n$, с непустой внутренностью относительно $L$.

Так как $\operatorname{int} M_1 \neq \varnothing$, то существуют число $\ell > 0$, вектор $m \in M_1$ , такие, что $\ell S \subset -m + M_1$, где $S-$ единичный замкнутый шар подпространства $L$ с центром в нуле.

Далее, для начальных точек $x_0, y_0 \in R^n, y_0 - x_0 \notin M$, определяем число $k = \left[ \frac{\left| -m + \pi y_0 - \pi x_0 \right|}{\ell} \right]$ , где $[m]$-означает целую часть числа $m$.

**Определение 1.** Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, со значениями из множеств $P, Q$ соответственно, будем называть допустимыми управлениями преследователя и убегающего.

**Определение 2.** Измеримая, допустимая функция $u(t) = U(t, t_0, t_1, ..., t_k, x^0, y^0)$, $t \geq 0$, где, $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < \infty$ - некоторые положительные числа, называется позиционной стратегией преследующего игрока, если система уравнений

$$\dot{x} = Ax + U(t, t_0, t_1, ..., t_k, x^0, y^0) \qquad x(0) = x_0,$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение $x(t)$, $t \geq 0$.

**Определение 2.** Будем говорить, что в дифференциальной игре (1), (2) из начальных точек $x_0, y_0 \in R^n, y_0 - x_0 \notin M$, разрешима задача преследования в классе позиционных стратегий за время $T$, если можно построить такую позиционную стратегию преследователя $u(t) = U(t, t_0, t_1, ..., t_k, x^0, y^0)$, $0 \le t \le T$, что для любого допустимого управления убегающего $v = v(t)$, $0 \le t \le T$, решения $x(t), y(t)$, $0 \le t \le T$, соответствующих задач Коши

$$\dot{x} = Ax + U(t, t_0, t_1, ..., t_k, x^0, y^0), \qquad x(0) = x_0 \;, \tag{3}$$

$$\dot{y} = By + v(t), \qquad y(0) = y_0 \tag{4}$$

удовлетворяют соотношению $y(T) - x(T) \in M$.

Если $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \le t < \infty$, произвольные допустимые управления игроков, то для решений задач Коши (3), (4) соответственно имеем

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t \Psi(t-\tau)u(\tau)d\tau \;, \quad y(t) = \Phi(t)y_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)v(\tau)d\tau \;, \tag{5}$$

где, $\Psi(t) = \exp(At)$, $\Phi(t) = \exp(Bt), t \ge 0$.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из $R^n$ на $L$ и переходим к формулировке результата. Введем многозначные отображения

$$U : [0, \infty] x R^n \to L, \; U(t, x) = -m + \pi\Psi(t)x + \int_0^t \pi\Psi(t-\tau)P d\tau \;,$$

$$V : [0, \infty] x R^n \to L \;, \; V(t, y) = \pi\Phi(t)y + \int_0^t \pi\Phi(t-\tau)Q d\tau, \; t \ge 0 \;, \tag{5}$$

где $x, y \in R^n, y - x \notin M$ -некоторые точки. Из компактности множеств $P, Q$ следует компактнозначность многозначных отображений $U(t, x)$, $V(t, y)$. Определим время $t_0 > 0$ когда впервые выполняется включение $\pi\Phi(t_0)y \in U(t_0, x)$. Если такого $t_0 > 0$ не существует, то положим $t_0 = \infty$.

Пусть минимум расстояния $|\pi \Phi(t)y-a|$ по $a\in U(t,x)$ достигается в точке $\grave{a}=x_*(t),\ x_*(t)\in U(t,x)$, максимум расстояния $|b-x_*(t)|$ по $b\in V(t,y)$ достигается в точке $b=y^*(t),\ y^*(t)\in V(t,y)$ . Из компактнозначности многозначных отображений $U(t,x)$, $V(t,y)$ , $t\geq 0$ , следует существование точек минимума $x_*(t)\in U(t,x)$, и максимума $y^*(t)\in V(t,y)$ при фиксированном $t>0$ **.**

**Предположение 1.** Для каждой паре точек $(x,y)$, $y-x\notin M$ , существует момент $t=t(x,y)<t_0$, при котором выполнено неравенство

$$\left|y^*(t)-x_*(t)\right|\leq\left|-m+\pi y-\pi x\right|-\ell\ . \tag{6}$$

**Теорема 1.** Пусть выполнено предположение 1. Тогда в игре (1)-(2) из всех точек $(x,y), y-x\notin M$, разрешима задача преследования в классе позиционных стратегий за конечное время.

**Предположение 2.** Существует натуральное число $r\geq 1$ , такое что, для каждой паре точек $(x,y)$, $y-x\notin M$ , существуют момент $t=t(x,y)<t_0$, при котором выполнено неравенство

$$\left|y^*(t)-x_*(t)\right|\leq\left|-m+\pi y-\pi x\right|-\frac{\ell}{r}\ . \tag{7}$$

**Теорема 2.** Пусть выполнено предположение 2. Тогда в игре (1)-(2) из всех точек $(x,y), y-x\notin M$, разрешима задача преследования в классе позиционных стратегий за конечное время.

**Предположение 3.** Для натурального числа $r\geq 1$ , каждой паре точек $(x,y)$, $y-x\notin M$, существуют момент $t=t(x,y)<t_0$, при котором выполнено одно из неравенств (6) или (7).

**Теорема 3.** Пусть выполнено предположение 3. Тогда в игре (1)-(2) из всех точек $(x,y), y-x\notin M$, разрешима задача преследования в классе позиционных стратегий за конечное время.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть $(x_0,y_0), y_0-x_0\notin M$ -произвольные точки. Тогда в силу условия (6) предположения1 существует момент $t_1=t_1(x_0,y_0)<t_0$, для которого верно неравенство $\left|y^{1*}(t_1)-x_{1*}(t_1)\right|\leq\left|-m+\pi y_0-\pi x_0\right|-\ell$ , здесь $x_{1*}(t_1)$ такая точка из $U(t_1,x_0)$, в которой достигается минимум расстояния $\left|\pi e^{t_1 B}y_0-a\right|$ по $a\in U(t_1,x)$ , $y^{1*}(t_1)$ такая точка из $V(t_1,x_0)$, где достигается максимум расстояния $\left|b-x_{1*}(t_1)\right|$ по $b\in V(t_1,x_0)$.

По определению числа $k$ существует число $\ell_1,\ 0<\ell_1\le\ell$, такое, что $\left|-m+\pi y_0-\pi x_0\right|=k\ell+\ell_1$ .

Согласно определению 2, преследователь для построения своего управления может использовать только информацию о значениях $x(t), y(t)$. Поэтому, выбирая допустимое управление $u(t)\in P,\ 0\le t\le t_1$, и тем самим определяя $\pi x(t)\in U(t,x),\ 0\le t\le t_1$, он старается минимизировать значение функции $\left|\pi \Phi(t_1)y_0-\pi x(t)\right|$ в момент $t_1$. А убегающий используя информацию о значениях $u(t), x(t), y(t)$ должен построить свое допустимое управление так, чтобы проекция решения $\pi y(t)$ находилась бы в каждый момент времени $t>0$ на максимально удаленной точке от множества $U(t,x)=-m+\pi\Psi(t)x+\int_0^t \pi\Psi(t-\tau)Pd\tau$. В частности, в момент $t_1$ для состояния убегающего возможно два случая: a) $\pi y(t_1)=y^{1*}(t_1)$; b) $\pi y(t_1)\ne y^{1*}(t_1)$. Поэтому, учитывая определения точек $x_{1*}(t_1),\ y^{1*}(t_1)$ имеем:

в случае a)

$$\left|\pi y(t_1)-x_{1*}(t_1)\right|=\left|y^{1*}(t_1)-x_{1*}(t_1)\right| , \tag{8}$$

в случае b)

$$\left|\pi y(t_1)-x_{1*}(t_1)\right|\le\left|y^{1*}(t_1)-x_{1*}(t_1)\right| . \tag{9}$$

Далее, рассмотрим уравнение

$$\int_0^{t_1}\Psi(t_1-\tau)u(\tau)d\tau=x_{1*}(t_1)-\Psi(t_1)x_0+m \tag{10}$$

относительно неизвестной вектор-функции $u(t)\in P,\ 0\le t\le t_1$. Из включения $x_{1*}(t_1)\in U(t_1,x_0)$, следует существование решения уравнения (10) и согласно лемме Филиппова [22], оно является измеримой функцией. Измеримое решение уравнения (10) обозначим через $u_1(t),\ 0\le t\le t_1$. В (3) положим $u=u_1(t),\ 0\le t\le t_1$, и считая $v=v(t),\ 0\le t\le t_1$, произвольной измеримой функцией со значениями из $Q$, используя формулы (4) и неравенства (8),(9) для решений имеем

$$\left|-m+\pi y(t_1)-\pi x(t_1)\right|=\left|-m+\pi\Phi(t_1)y_0-\pi\Psi(t_1)x_0+\int_0^{t_1}\pi\Phi(t_1-t)v(t)dt-\int_0^{t_1}\pi\Psi(t_1-t)u_1(t)dt\right|=$$

$$=\left|\pi\Phi(t_1)y_0+\int_0^{t_1}\pi\Phi(t_1-t)v(t)dt-x_{1*}(t_1)\right|\le\left|y^{1*}(t_1)-x_{1*}(t_1)\right|\le\left|-m+\pi y_0-\pi x_0\right|-\ell . \tag{11}$$

Таким образом, в момент $t_1(x_0, y_0)$ для решений (4) соответствующих задач Коши (3) верно оценка (11). Теперь $t_1(x_0, y_0)$ берем за начало игры и по точке $x_0^1 = x(t_1),\ y_0^1 = y(t_1)$ и определим многозначные отображения $U(t, x_0^1),\ V(t, y_0^1)$ с заменой в (5) $x$ на $x_0^1$ , $y$ на $y_0^1$ соответственно. Также как и выше определим момент $t_0^1 > 0$ , когда впервые выполняется включение $\pi\Phi(t_0^1)y_0^1 \in U(t_0^1, x_0^1)$. Если такого $t_0^1$ не существует, то положим $t_0^1 = \infty$ . Далее, используя условие предположения 1 определим момент $t_2 = t_2(x_0^1, y_0^1) < t_0^1$ , для которого верно неравенство $\left|y^{1*}(t_2) - x_{1*}(t_2)\right| \le \left|-m + \pi y_0^1 - \pi x_0^1\right| - \ell$ , здесь $x_{1*}(t_2)$ такая точка из $U(t_2, x_0^1)$, в которой достигается минимум расстояния $\left|\pi e^{t_2 B} y_0^1 - a\right|$ по $a \in U(t, x_0^1)$ , $y^{1*}(t_2)$ такая точка из $V(t_2, x_0^1)$, в которой достигается максимум расстояния $\left|b - x_{1*}(t_2)\right|$ по $b \in V(t_2, x_0^1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^{t_2} \Psi(t_2 - \tau)u(\tau)d\tau = x_{1*}(t_2) - \Psi(t_2)x_0^1 + m \qquad (12)$$

относительно неизвестной вектор-функции $u(t) \in P,\ 0 \le t \le t_2$. Из включения $x_{1*}(t_2) \in U(t_2, x_0^1)$, следует существование решения уравнения (12) и согласно лемме Филиппова [22] оно является измеримой функцией. Измеримое решение уравнения (12) обозначим через $u_2(t),\ 0 \le t \le t_2$. В (3) положим $u = u_2(t),\ 0 \le t \le t_2$, и считая $v = v(t),\ 0 \le t \le t_2$, произвольной измеримой функцией, используя формулы (4) и оценку (11), для решений имеем

$$\left|-m + \pi y(t_2) - \pi x(t_2)\right| = \left|-m + \pi\Phi(t_2)y_0^1 - \pi\Psi(t_2)x_0^1 + \int_0^{t_2} \pi\Phi(t_2 - t)v(t)dt - \int_0^{t_2} \pi\Psi(t_2 - t)u_2(t)dt\right| =$$

$$= \left|\pi\Phi(t_2)y_0^1 + \int_0^{t_2} \pi\Phi(t_2 - t)v(t)dt - x_{1*}(t_2)\right| \le \left|y_{1*}(t_2) - x_{1*}(t_2)\right| \le \left|-m + \pi y_0^1 - \pi x_0^1\right| - \ell \le$$

$$\le \left|-m + \pi y_0 - \pi x_0\right| - 2\ell\,. \qquad (13)$$

Таким образом, в момент $t_2(x_0^1, y_0^1)$ для решений (4) соответствующих задач Коши (3) верно оценка (13). Теперь $t_2(x_0, y_0)$ берем за начало игры и продолжая такой способ управления вектором $u \in P$ $k$ раз на $k$-м отрезке $0 \le t \le t_k$, используя оценки (11), (13) для решений (4) имеем

$$\left|-m + \pi y(t_k) - \pi x(t_k)\right| = \left|-m + \pi\Phi(t_k)y_0^{k-1} - \pi\Psi(t_k)x_0^{k-1} + \int_0^{t_k} \pi\hat{O}(t_k - t)v(t)dt - \int_0^{t_k} \pi\Psi(t_k - t)u_k(t)dt\right| =$$

$$=\left|\pi\Phi(t_k)y_0^{k-1}+\int_0^{t_k}\pi\hat{O}(t_k-t)v(t)dt-x_{k-1,*}(t_2)\right|\le\left|y_{k-1,*}(t_2)-x_{k-1,*}(t_k)\right|\le\left|\pi y_0^{k-1}-\pi x_0^{k-1}\right|-\ell$$

$$\le\left|-m+\pi y_0-\pi x_0\right|-k\ell\le k\ell+\ell_1-k\ell=\ell_1\ . \qquad (14)$$

Таким образом в момент $t=t_k$ согласно (14) верно соотношение

$-m+\pi y(t_k)-\pi x(t_k)\in\ell_1 S\subset\ell S\subset -m+M_1$, что влечет за собой выполнение включения $\pi y(t_k)-\pi x(t_k)\in M_1$. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Отметим, что теоремы 2,3 являются более общей чем теорема 1(случай $r=1$) и так как условия (6), (7) идентичны по смыслу, доказательство теорем 2,3 можно провести по схеме доказательства теоремы 1, несложными изменениями.

Пример . Рассмотрим игру с простым движением

$$\dot{x}=u,\ \dot{y}=v, \qquad (15)$$

где $x,y,u,v\in R^n, n\ge 1,$ управляющий параметр преследователя $u$ из класса измеримых функций удовлетворяющих ограничению

$$|u|\le\rho\quad , \qquad (16)$$

управляющий параметр убегания $v$ из класса измеримых функций удовлетворяющих геометрическому ограничению

$$|v|\le\sigma\,. \qquad (17)$$

Дифференциальная игра (15)-(17) считается завершённой, если $y-x\in\ell S,\ell>0$ , т.е. $M=\ell S\subset R^n$.

Легко можно проверить, что если

$$\rho>\sigma \qquad (18)$$

то для игры (15) с ограничениями (16)-(18) выполнены все условия предположений 2,3. Поэтому для этой игры применимы теоремы 2,3 и они дают одинаковый результат, а именно, если выполнено неравенство (18) , то в игре (15) с ограничениями (16)-(17) из всех начальных точек $y_0 - x_0 \notin M$, возможно завершение позиционного преследования за конечное время.

Литература

1. Azamov A.A. On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit // Math. USSR, Sb. 1983. V. 46, No. 3. P. 429–437. https://doi.org/10.1070/SM1983v046n03ABEH002944
2. Azamov A.A. Semistability and duality in the theory of the Pontryagin alternating integral // Sov. Math., Dokl. 1988. V. 37, No. 2. P. 355–359.
3. Ibragimov G.I., Azamov A., and Khakestari M .. Solution of a linear pursuit- evasion game with integral constraints. ANZIAM J., 52 (E): E59-E75. 2011.
4. Красовский Н. Н., Позиционная дифференциальная игра, Тр. МИАН СССР, 1985, том 169, 159–179
5. Красовский Н.Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры. 1974, изд-во: Наука, М., стр. : 456 с.,
6. Мищенко Е.Ф., Сатимов Н. Об алтернированном интеграле в линейных дифференциальных играх с нелинейным управлением. Дифф. Уравнения, 1974, 10, 2173-2178.
7. Маматов М.Ш., Собиров Х.Х. On the theory of position pursuit Differential Games//Journal of Mathematical Sciences, (2020) Volume 245, pp.332-340.
8. Nikol'skii M.S., A direct method of solution of linear differential pursuit-evasion games, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, vol. 33, no. 6, pp. 455–458, 1983.
9. Nikol'skii M.S., On the lower alternating integral of Pontryagin in linear differential games of pursuit // Math. USSR, Sb. 1987. V. 56, No. 1. P. 33–47.
10. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования, Математический сборник, 1980, 112(154), №3(7), с.307-330.
11. Понтрягин Л. С, Мищенко А. С. Решение линейной дифференциальной игры преследования без дискриминации убегающего объекта.— ДАН СССР, 1984, т. 277, № 5, с. 1063—1066.
12. Понтрягин Л. С, Мищенко А. С. Решение линейной дифференциальной игры преследования на основе алтернированного интегрирования без дискриминации убегающего объекта.—ДАН СССР, 1984, т. 277, № 6, с. 1330—1334.
13. Pontryagin L.S. Selected works. Moscow: Maks-Press, 2004.
14. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. ДАН СССР, 1981. Т.259. №4. с. 785-789.
15. Рахманов А.Т. Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управления. Дифф. Уравнения, 1989, 25(5), с. 785-790.

16. Рахманов А.Т. Об одной дифференциальной игре с различными ограничениями на управления и при фазовом ограничении на состояние убегающего. Мухаммад ал-Хоразмий авлодлари, 2022, № 3(21), 215-219.
17. Сатимов Н. О задачах преследования и убегания в дифференциальных играх.— Матем. заметки, 1981, т. 29, № 3, с. 455—477.
18. Сатимов Н.Ю. О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1976, 229, № 4, с. 808–811.
19. Сатимов Н.Ю. Об одном способе уклонения в дифференциальных играх. Матем. сборник, 1976, т.99(141), №3, С. 380–393.
20. Саматов Б.Т. Задача преследования-убегания при интегрально-геометрическом ограничении на управление преследователя. «Автоматика и телемеханика», 2013, №7, с.17-28.
21. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с выпуклыми интегральными ограничениями. Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – 19, № 4. – с. 308–319.
22. Филиппов А.Ф., Вестник МГУ, Сер. Матем. Мех. 1959, №2, с. 25-32.