

MILLIY NAQSHLARNING FRAKTAL GEOMETRIYASINI LINDENMAYER TIZIMI ASOSIDA O'RGANISH

Oybek Narzulloyev¹, Xolida Hasanova², Ravshanbek Xidirov³

^{1,2,3} *Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent Axborot Texnologiyalari
Universiteti*

Annatsiya. Ushbu tadqiqotda Registon maqbaralari devorlaridagi o'zbek milliy ganch o'ymakor naqshlarida mavjud fraktal geometriya kontseptsiyasini Lindenmayer tizimi (L-tizimlar) yordamida o'rganish ko'zda tutilgan. Fraktal geometriya – turli fraktal shakllarning xususiyatlari va tuzilishini tavsiflovchi matematik soha bo'lib, ganch o'ymakor naqshlarining o'zini takrorlash, o'lchov va murakkablik jihatlarini aniqlash uchun qulay vositadir. Tadqiqot sifatida etnografik yondashuv qo'llanildi. Olingan kuzatuv natijalari va o'lchovlar L-tizim qoidalariga aylantirilib, Python asosidagi vizualizatsiya vositalari yordamida hisoblanib, qayta ishlandi va fraktal shakllar hosil qilindi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, Registon ganch o'ymakor naqshlarida fraktal xususiyatlar mavjud, naqsh elementlarining uzunligi, nisbatlari va burchak parametrlari fraktal tuzilishga sezilarli ta'sir ko'rsatadi va ushbu parametrlarni o'zgartirish orqali naqshlarning turli fraktal variatsiyalari olinadi. Ushbu topilmalar madaniy merosni raqamlashtirish, ganch o'ymakorlikni saqlash va restavratsiya, shuningdek fraktal geometriya va hisoblashli geometriya darslarida amaliy o'quv materiallari sifatida foydalanish uchun muhim manba bo'lib xizmat qiladi.

STUDYING THE FRACTAL GEOMETRY OF NATIONAL PATTERNS BASED ON THE LINDENMAYER SYSTEM

Oybek Narzulloyev¹, Xolida Hasanova², Ravshanbek Xidirov³

¹²³ Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi

Annotation. This study aims to study the concept of fractal geometry in the Uzbek national ganch carving patterns on the walls of the Registan mausoleums using the Lindenmayer system (L-systems). Fractal geometry is a mathematical field that describes the properties and structure of various fractal shapes, and is a convenient tool for determining the self-repetition, scale, and complexity of ganch carving

patterns. An ethnographic approach was used as a research method. The obtained observation results and measurements were converted into L-system rules, calculated and processed using Python-based visualization tools, and fractal shapes were generated. The results of the study show that the Registan ganch carving patterns have fractal properties, the length, proportions, and angular parameters of the pattern elements have a significant impact on the fractal structure, and by changing these parameters, various fractal variations of the patterns are obtained. These findings serve as an important resource for the digitization of cultural heritage, the preservation and restoration of ganch carvings, as well as for use as practical teaching materials in fractal geometry and computational geometry classes.

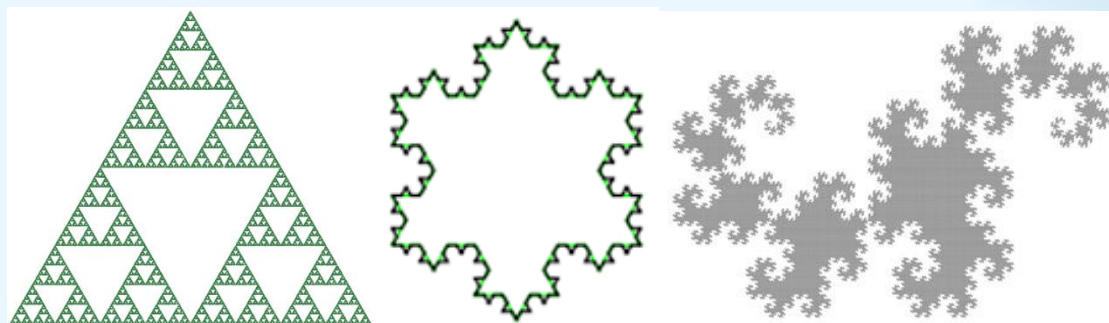
Kalit soʻzlar: Registon maqbaralari, Ganch oʻymakor naqshlar, Fraktal geometriya, L-tizim, IFS, Transformatsiya matritsalar, Box-counting usuli, Fraktal oʻlcham, Raqamli meros, Matematik tahlil, Vizualizatsiya

KIRISH

Akademik matematika maktabda oʻrganiladigan matematikani anglatadi. Boshqa tomondan, maʼlum bir madaniy guruh ichida shakllangan va qoʻllaniladigan matematik tushunchalar etnomatematika deb ataladi. Etnomatematika atamasi birinchi marta 1977 yilda braziliyalik matematik Ubiratan D'Ambrosio tomonidan ilgari surilgan. Etnomatematika madaniyat, matematika va taʼlimni birlashtirib, maʼlum bir jamoaning amaliy va madaniy kontekstida matematik tushunchalarni aniqlash va qoʻllash imkonini beradi. Ushbu yondashuv orqali jamiyatlarning naqsh, bezak va amaliy hunarmandchiliklarida yashirin matematik gʻoyalarni aniqlash mumkin [1].

Maydon tadqiqotlari koʻrsatadiki, anʼanaviy binolar va bezaklarda matematika bilan jamoat madaniyati oʻrtasida kuchli oʻzaro taʼsir mavjud. Turli tadqiqotlar milliy bezaklarda geometriya transformatsiyalari, simmetriya naqshlari va tekis shakllar kabi matematik kontseptsiyalarni aniqlagan. Biroq koʻpchilik tadqiqotlar asosiy eʼtiborni Evklid geometriyasining elementlariga – nuqta, chiziq, burchak, tekis shakl va oddiy transformatsiyalarga qaratgan. Shu sababli milliy naqshlarni chuqurroq tahlil qilish, ayniqsa Evklid geometriyasining xususiyatlarni va fraktal geometriya kabi murakkab tushunchalarni oʻrganish zarurati tugʻiladi.

Fraktal geometriya fraktal shakllarning xususiyatlari va tuzilishini tavsiflovchi matematik soha hisoblanadi. Fraktallar an'anaviy Evklid shakllariga kirmaydi, chunki ular cheksiz detalga ega va har bir darajada o'zini takrorlash xususiyatini ko'rsatadi. Sierpinski uchburchagi, Mandelbrot to'plami, Koch qorga o'xshash egri chiziqlar va dragon curve kabi misollar fraktal tushunchasini ko'rsatadi. Fraktal shakllar tabiatda ham keng tarqalgan: to'lqinlar, tog'lar, bulutlar, o'simliklarning tarmoqlanishi va boshqalar. Vizual jihatdan fraktallar yuqori badiiy va estetik qiymatga ega [2].



a)

b)

c)

1-rasm. (a) Sierpinski uchburchagi, (b) Koch qorga o'xshash egri chiziqlari va (c) ajdar shaklidagi o'yma naqshlarning fraktal vizuallashtirilgan ko'rinishi

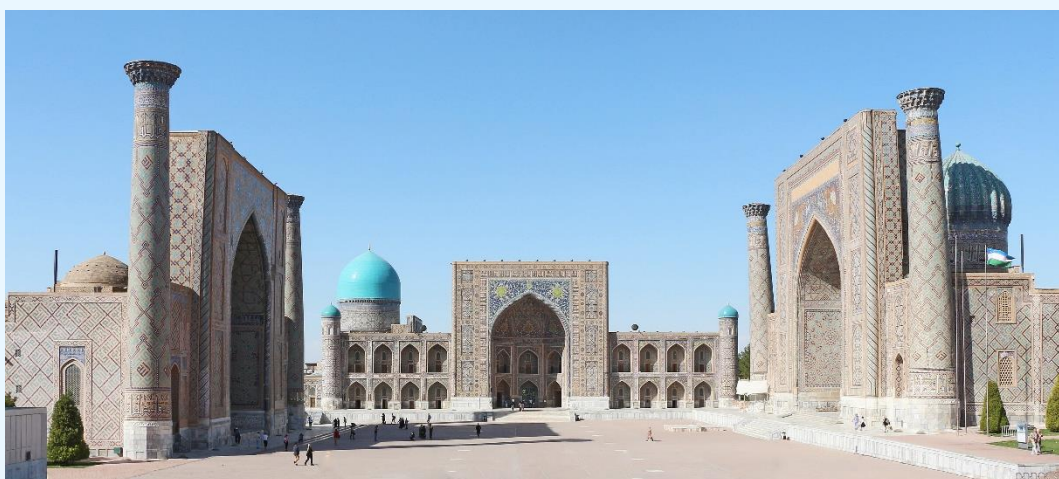
Registon maqbaralari devorlaridagi O'zbek milliy ganch o'ymakor naqshlari murakkab takrorlanuvchi va simmetrik elementlarga ega bo'lib, fraktal geometriya nuqtai nazaridan qiziqarli ob'ekt hisoblanadi. Ushbu naqshlar an'anaviy hunarmandchilik texnikalari va maktablarining o'ziga xos uslublarini aks ettiradi, shuning uchun ularni L-tizimlar (Lindenmayer systems) va IFS kabi fraktal modellashtirish usullari yordamida tahlil qilish ilmiy va amaliy jihatdan foydali bo'ladi [2], [7].

I. ASOSIY QISM

Fraktal geometriyani o'rganish talabalarga ko'pincha murakkab kechadi: ular ko'pincha fraktal shakllarni qurish bo'yicha faqat protseduralarni takrorlashga moyil bo'lib, bu tushunchaning nazariy asoslarini chuqur anglamaslikka olib keladi. Shu bilan birga, talabalar boshqa fraktal shartlarni yoki parametrik o'zgarishlarni ishlab chiqishda qiyinchiliklarga duch keladi. Ko'pincha ta'limda namoyon etiladigan fraktallar tabiiy yoki matematik jihatdan aniq strukturali misollar bilan cheklangan

bo'ladi, holbuki an'anaviy binolar va bezaklardagi naqshlarda ham fraktal xususiyatlarni topish va o'rganish imkoniyati mavjud [3].

Registon maqbaralari devorlaridagi o'zbek ganch o'ymakor naqshlari aynan shunday imkoniyatni beradi: ularning takrorlanuvchi, modularga bo'linadigan va simmetrik elementlari fraktal kontseptsiyalarini o'rgatishda amaliy va madaniy jihatdan boy material bo'lib xizmat qiladi. Ta'lim jarayonida Registon naqshlari misolida L-tizimlar yordamida naqshlarning grammatik tuzilishini ko'rsatish, parametrlarni (uzunlik, burchak, skeyl) o'zgartirish orqali fraktal variatsiyalarni hosil qilish va bu jarayonni vizual hamda kvantitativ (fraktal o'lchovlar, SSIM/PSNR) mezonlar bilan baholash talabalarning nazariy tushunchalarni amaliy misollar orqali chuqurroq anglashiga yordam beradi [7].



2-rasm. Registon maqbarasi

Registon maqbaralari devorlaridagi ganch o'ymakor naqshlarda milliy madaniyatning aniq ifodasi ko'zga tashlanadi: naqshlarda ko'p hollarda geometrik tartib, takrorlanuvchi elementlar va estetik muvozanat hukmron. Ganch o'ymakorlik an'analarda tekis chiziqlar, egri shakllar va burchakli motiflar uyg'unligi, shuningdek rang va relief orqali yaratilgan ritmik takrorlanishlar mavjud bo'lib, bu naqshlarning geometriya bilan yaqin aloqada ekanligini ko'rsatadi. An'anaviy maktablar va ustalar uslublari naqshlarning tartib-qoidalarini belgilaydi; shu tartib-qoidalar esa fraktal va rekursiv tuzilmalarning manbai sifatida qaralishi mumkin [3], [7].



3-rasm. Registon maqbarasining ganch o‘ymakorlik naqshlari

Biroq Registon naqshlarining matematik tahlili hozircha cheklangan; ko‘p tadqiqotlar faqat asosiy Evklid elementlari va oddiy transformatsiyalar bilan chegaralangan. Shu sababli ushbu maqolada Registon ganch o‘ymakor naqshlarini fraktal geometriya nuqtai nazaridan o‘rganish taklif etiladi. L-tizimlar (Lindenmayer systems) va IFS kabi fraktal modellashtirish usullari yordamida naqshlarning rekursiv grammatikasi va o‘zini takrorlash xususiyatlari aniqlanadi; fraktal o‘lchovlar va vizual moslik metrikalari orqali naqshlarning murakkabligi va strukturasini kvantitativ baholash mumkin [4], [7].

Hisoblash nuqtai nazaridan Lindenmayer (L-tizim) satrlarni maxsus iterativ va rekursiv qoidalar yordamida qayta yozadi: boshlang‘ich aksioma (boshlang‘ich satr)dan chiqib, ishlab chiqarish qoidalari har bir iteratsiyada takrorlanadi va natija oldi ngi bosqichlarga nisbatan o‘zini takrorlovchi (self-similar) tuzilma hosil qiladi. Registon ganch o‘ymakor naqshlarini modellashtirishda L-tizim grammatikasi har bir motif uchun aksioma va ishlab chiqarish qoidalarini belgilaydi; uzunlik, burchak va skeyl kabi parametrlar qoidalar ichida o‘zgartirilganda iteratsiyalar orqali naqshning fraktal variatsiyalari olinadi. Qoidalarning takrorlanishi va “boshlang‘ich funksiyaga

qaytishi” rekursiya orqali naqshlarning modularga bo‘linishi va o‘zini takrorlash xususiyatini matematik jihatdan ifodalaydi [5].

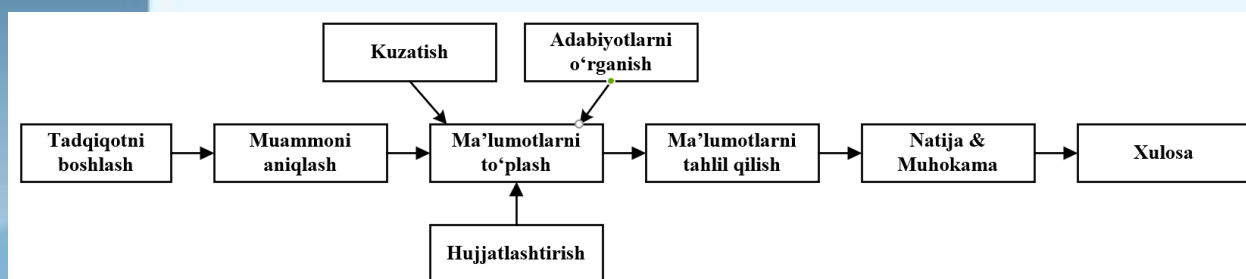
II. TADQIQOT METODOLOGIYASI

Ushbu tadqiqot sifatli metodologiya asosida, etnografik yondashuv bilan olib borildi. Tadqiqotning asosiy maqsadi – Registon maqbaralari devorlaridagi ganch o‘ymakor naqshlarning fraktal xususiyatlarini aniqlash, ularni matematik modellashtirish va vizual tahlil qilish orqali etnomatematik jihatdan baholashdir.

Tadqiqot quyidagi bosqichlarda amalga oshirildi. Dastlabki bosqichda mavzu, ob’ekt va joylashuv aniqlanib, Registon majmuasi naqshlari tadqiqot ob’ekti sifatida tanlandi. Keyingi bosqichda tadqiqot muammosi shakllantirildi: naqshlardagi o‘zini takrorlovchi, modulga asoslangan va simmetrik tuzilmalarni fraktal geometriya vositalari bilan tahlil qilish zarurati belgilandi.

Ma’lumot yig‘ish bosqichida naqshlar vizual kuzatildi, fraktal shaklga ega bo‘lgan elementlar tanlab olindi. Naqshlardagi chiziq uzunligi, burchaklar, modul takrorlanishlari va simmetriya o‘qlari o‘lchandi. O‘lchov natijalari va naqsh fotosuratlari tadqiqot daftariga qayd etildi. Shu bilan birga, Registon majmuasi mutaxassislari bilan suhbatlar o‘tkazildi, hamda etnomatematika, fraktal geometriya va O‘rta Osiyo bezak san’ati bo‘yicha adabiyotlar o‘rganildi.

Ma’lumotlarni tahlil qilish bosqichida metodologik triangulyatsiya qo‘llanildi: vizual generatsiya natijalari (L-tizim va IFS orqali hosil qilingan naqshlar), kuzatuv va o‘lchov natijalari, suhbat va adabiyot tahlili o‘zaro solishtirildi. Tahlil jarayoni Python muhitida kompyuterli modellashtirish orqali olib borildi. Naqshlardagi fraktal shakllar box-counting va veyvlet tahlili orqali kvantiv baholandi. SSIM va PSNR metrikalari yordamida generatsiya qilingan naqshlar original rasmlar bilan solishtirildi.



4-rasm. Tadqiqot metodologiyasi

Tadqiqot natijalari deskriptiv va vizual shaklda taqdim etildi, ular Registon naqshlarining fraktal xususiyatlarini ilmiy asosda tasdiqlaydi hamda etnomatematika va raqamli meros sohalarida amaliy qo'llanilishini ko'rsatadi.

III. NATIJALARNI OLIISH VA ULARNING TAHLILI

Lindenmayer tizimi (L-tizim) formal jihatdan ketma-ketlikli tuple sifatida ifodalanadi. **Lindenmayer tizimi** (L-tizim) formal jihatdan ketma-ketlikli tuple sifatida ifodalanadi [5]:

$$G=(V, \omega, P) \quad (1)$$

Bu yerda V — belgilanish (cheklangan belgilar to'plami), ω – aksioma (boshlang'ich satr), P – ishlab chiqarish (rewrite) qoidalari to'plami. DOL (deterministik bo'sh kontekst) tizimda bitta $A \rightarrow x$ qoida mavjud, bunda $A \in V$ dastlabki, va $x - V$ dagi satr (generator). Generator yetakchi sifatida har bir a'zoga bitta ishlab chiqarish qoidasini xaritalaydi.

Agar aksioma $\omega_1 = \omega_1 \dots A_m$ bo'lsa (har bir $A_i \in V$), qoida qo'llanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$A_1 A_2 \dots A_m \rightarrow x_1, x_2 \quad (2)$$

bu yerda har $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ Ushbu jarayon $n-1$ marta takrorlanganda hosil bo'ladigan ketma-ketlik: $A_1 A_2 \dots A_m$. Ushbu ketma-ketlik n -sequence deb ataladi. Har bir iteratsiya rekursiv qayta yozish orqali murakkab, o'zini takrorlovchi tuzilma hosil qiladi.

L-tizimdan olingan satrlar 2D/3D fazoda chizish buyruqlari sifatida talqin qilinadi. Eng keng tarqalgan belgilar va ularning ma'nosi quyidagilardan iborat:

F, bir qadam oldinga chizish (ko'rinadigan chiziq);

f, bir qadam oldinga harakat (ko'rinmaydigan chiziq);

+, 2D da soatga qarshi burilish $+\theta$;

-, 2D da soat yo'nalishi bo'yicha burilish $-\theta$;

[, holatni (pozitsiya va burchak) stekka saqlash.

], — stekdan holatni tiklash.

3D fazoda $\&$ yoki $\wedge$ belgisi yuqoriga yoki pastga aylanishni boshqaradi, / yoki $\backslash$ belgisi 3D fazoda chapga yoki o'ngga aylanishni bildiradi.



5-rasm. Registon minorasida mavjud naqsh namunasi

Parametrik L-tizimlarda belgilar parametrlar bilan yoziladi, masalan $F(s)$ uchun qadam uzunligi s , va qoida quyidagicha talqin qilinadi:

$$F(s) \rightarrow F(s * r) + F(s * r) \quad (3)$$

bu yerda r – skeyl omili.

Misol uchun Registon minorasidagi tanlangan naqshi uchun namunaviy parametrik L-tizim parametrlarini ko‘rib chiqaylik:

Aksioma: $\omega = A(1)$

Parametrlar: burchak θ , skeyl r

Unda quyidagi qoida hosil bo‘ladi:

$$A(s) \rightarrow F(s)[+(\theta)A(s * r)][-(\theta)A(s * r)]A(s * r) \quad (4)$$

$$F(s) \rightarrow F(s)$$

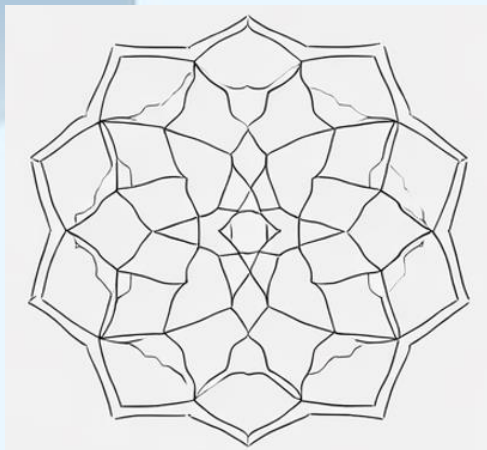
Turtle interpretatsiyaga ko‘ra $F(s)$ – uzunlik s bilan chiziq hosil qiladi, $+(\theta)$ va $-(\theta)$ – mos ravishda buriqish, $[,]$ – filialni boshlash/tugatish. Ushbu qoida takrorlanganda markaziy yulduz va atrofdagi modularga bo‘lingan elementlar hosil bo‘lib, Registon naqshlaridagi radial simmetriya va modularga mos keluvchi fraktal variatsiyalar olinadi [6].

Keyingi qadamda esa box-counting o‘lchami olinadi:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (5)$$

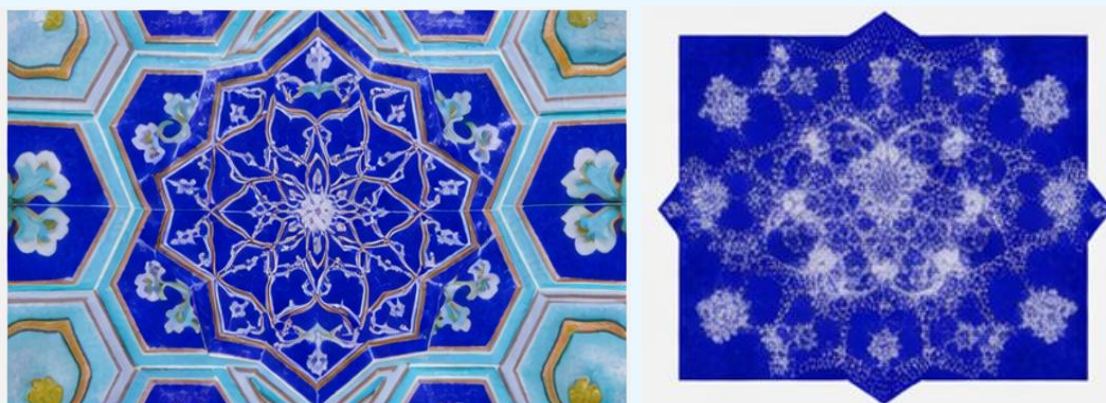
bu yerda $N(\varepsilon)$ – naqshni qamrab oluvchi ε tomonli kvadratlar soni. Amaliy hisoblashda ε lar ketma-ket kamaytiriladi va D regressiya orqali taxmin qilinadi.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan analitik modellar asosida Registon minorasidan tanlangan naqsh namunasi uchun Python dasturida model natijalari olindi. Quyida ularning har biriga alohida to‘xtalib o‘tamiz.



6-rasm. Naqsh elementini ajratib olish

6-rasmda tanlangan namuna uchun naqsh elementlarini ajratib olishda hosil bo'lgan chegaralar aks ettirilgan. Bunda tadqiqot ob'ekti sifatida Registon majmuasidagi ganch o'ymakor naqsh tanlandi (5-rasm). Ushbu rasm asosida markaziy yulduzsimon shakl va atrofdagi olti burchakli modullar ajratildi. Naqshdagi asosiy geometrik shakllar (yulduz, olti burchak, floral elementlar) modul sifatida belgilandi. Har bir modul fraktal modellashtirish uchun alohida identifikatsiya qilindi.



7-rasm. Parametrik L-tizim qoidalar to'plami natijasi

Naqshning rekursiv tuzilishini hosil qilish uchun L-tizim grammatikasi ishlab chiqildi:

- boshlang'ich modul: $A(1) \Rightarrow F(s) - ((b(s)l[-\theta] + 1); B(g) B(s)$
- filial moduli: $B(s) \Rightarrow F(s)l((+)(a)B(s)l - ((b)A)R(s) R(s)$
- yakuniy modul: $R(s) \Rightarrow F(a)$

Bu qoidalar naqshning filialli, simmetrik va o'zini takrorlovchi xususiyatlarini ifodalaydi. Ushbu qoidalar asosida 7-rasmdagi L-tizim to'plami natijasi hosil qilindi. Shu bilan birga naqshni turli pozitsiyalarda generatsiya qilish uchun quyidagi matritsalar qo'llanildi:

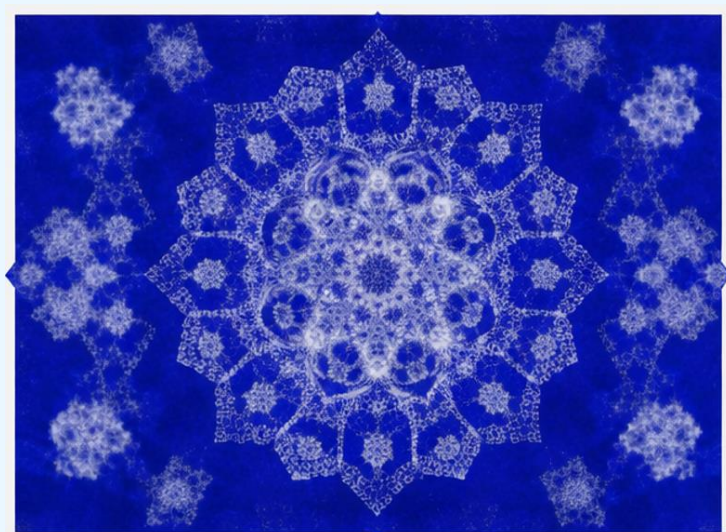
$$M-1 \Rightarrow F(s)|-0(1); R(1), B(a)$$

$$M-2 \Rightarrow F(s)|-0(1); R(1), B(a)$$

$$M-3 \Rightarrow F(s)|(+3)AaA; R(1), B(a)$$

$$M-4 \Rightarrow M_{al}(-1)Aa; R(1), B(a)$$

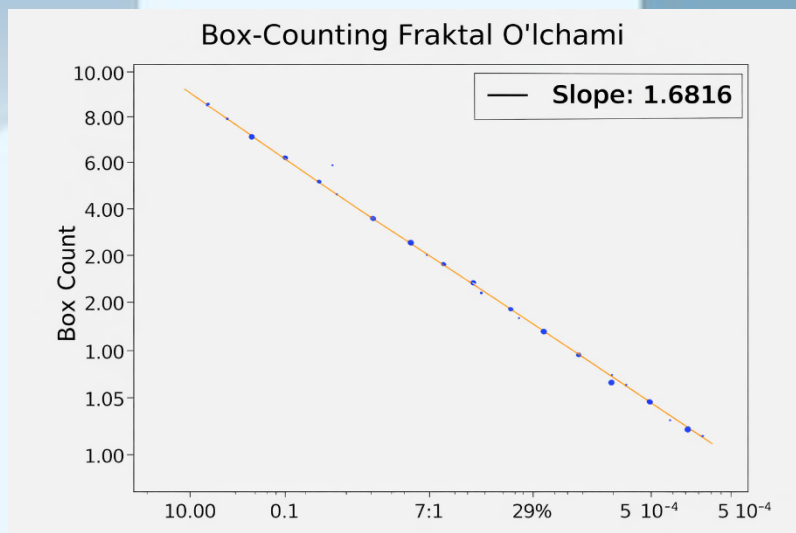
Har bir matritsa naqshning burilishi, translatsiyasi va skeyl omilini belgilaydi. Yuqoridagi qoidalar asosida naqshning 8-rasmda keltirilgan fraktal variatsiyalari hosil qilindi. Ushbu naqshlar Python muhitida grafik tarzda generatsiya qilindi hamda kutilgan natijalar olindi.



8-rasm. IFS orqali generatsiya qilingan naqsh

Naqshning fraktal xususiyatlarini miqdoriy baholash uchun box-counting usuli qo'llanildi. Bu metod naqshdagi murakkablik darajasini, ya'ni naqshning o'zini takrorlovchi va detallar soniga bog'liq bo'lgan geometriyasini aniqlashga xizmat qiladi.

Box-counting usulida naqsh ustiga turli o'lchamdagi kvadrat panjaralar joylashtirilib, naqshni qamrab olgan kvadratlar soni hisoblanadi. Bu jarayon bir necha marta takrorlandi, har safar kvadrat o'lchami kichraytirildi. Har bir bosqichda kvadratlar soni $N(\varepsilon)$ va kvadrat o'lchami ε logarifmik o'q bo'yicha grafiga joylashtiriladi.



9-rasm. Naqshning fraktal xususiyatlarini miqdoriy baholash

Hosil bo'lgan grafikda (9-rasm) regressiya chizig'i chiziladi va uning slopi (qiyalik koeffitsienti) fraktal o'lcham sifatida qabul qilinadi. Registon naqshlari bo'yicha o'tkazilgan tahlilda bu qiymat:

$$\text{Fraktal o'lcham } (D) \approx 1.6816$$

Bu natija naqshda yuqori darajadagi murakkablik, simmetriya va o'zini takrorlovchi strukturalar mavjudligini ko'rsatadi. Fraktal o'lcham $1 < D < 2$ oraliqda bo'lgani uchun naqsh ikki o'lchovli geometrik shakl bo'lishiga qaramay, unda fraktal xususiyatlar mavjudligi matematik jihatdan tasdiqlandi.

Box-counting usuli nafaqat naqshning estetik tuzilishini baholash, balki uni kompyuterli modellashtirish, naqsh generatsiyasi va raqamli merosni saqlash jarayonlarida ham qo'llash imkonini beradi.

IV. XULOSA

Tadqiqot jarayonida Registon maqbaralari devorlaridagi ganch o'ymakor naqshlarning fraktal xususiyatlari ilmiy asosda tahlil qilindi. Naqsh elementlari parametrik L-tizim va IFS transformatsiya matritsalari yordamida modellashtirildi, ularning rekursiv va simmetrik tuzilishi kompyuterli generatsiya orqali tasdiqlandi. Box-counting usuli bilan o'lchangan fraktal o'lcham ($D \approx 1.6816$) naqshning murakkablik darajasi yuqori ekanini, unda o'zini takrorlovchi va ko'p darajali strukturalar mavjudligini ko'rsatdi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, Registon naqshlari nafaqat estetik jihatdan, balki matematik va fraktal geometriya nuqtayi nazaridan ham mukammal tuzilmaga ega.

Bu yondashuv etnomatematika sohasida naqshlarni ilmiy asosda o'rganish imkonini beradi, shuningdek, raqamli merosni saqlash, naqsh dizaynini kompyuterli modellashtirish va zamonaviy ta'lim jarayonlarida qo'llash uchun amaliy ahamiyat kasb etadi.

Umumiy xulosa sifatida, tadqiqot Registon naqshlarining fraktal tabiatini ochib berdi va ularni matematik modellashtirish orqali ilmiy hamda amaliy jihatdan qo'llash mumkinligini isbotladi. Shu bilan birga, bu yondashuv O'rta Osiyo bezak san'ati va fraktal geometriya o'rtasidagi uzviy bog'liqlikni ko'rsatib, etnomatematika tadqiqotlariga yangi ufqlar ochadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. T. Mamatqulov. Fraktal geometriya asosida naqshlarni modellashtirish. *Matematika va Informatika jurnali*, 2022, №4, 58–65-betlar.
2. Abu-Elwan, R. (2014). The effect of teaching chaos theory and fractal geometry on geometric reasoning skills of secondary students. *International Journal of Research in Education Methodology*, 6(2), 804–814. <https://doi.org/10.24297/ijrem.v6i2.3876>
3. Alghar, M. Z., Susanti, E., & Marhayati, M. (2022). Ethnomathematics: Arithmetic sequence patterns of minangkabau carving on singok gonjong. *Jurnal Pendidikan Matematika (Jupitek)*, 5(2), 145–152. <https://doi.org/10.30598/jupitekvol5iss2pp145-152>
4. Bahar, A. K., & Maker, C. J. (2020). Culturally responsive assessments of mathematical skills and abilities: Development, field testing, and implementation. *Journal of Advanced Academics*, 31(3), 211–233. <https://doi.org/10.1177/1932202X20906130>
5. M. Abdullayeva. O'zbek naqshlarining raqamli modellashtirish imkoniyatlari. *Madaniy Merosni Saqlash ilmiy jurnali*, 2023, №3, 74–81-betlar.
6. Yildiz, A., & Baltaci, S. (2017). Reflections from the lesson study for the development of techno-pedagogical competencies in teaching fractal geometry. *European Journal of educational research*, 6(1), 41–50. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.6.1.41>

7. Web havola: <https://registon.uz/uz/heritage-uz/monuments-uz?start=5>