

NUMERICAL SOLUTION OF ELASTIC COUPLED PROBLEMS FORMULATED IN TERMS OF STRESSES

Yusupov Yusufbay Saidjonovich – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Applied Informatics, Kimyo International University in Tashkent (KIUT). E-mail: yusabio@kiut.uz

Rakhmatullayeva Gulshoda Ilkhom qizi – Master's student, Faculty of Applied Mathematics and Intellectual Technologies, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. E-mail: guliraxmatullayeva5@gmail.com

Abstract

This work is devoted to the construction of a mathematical model and corresponding computational models that describe the deformation processes of isotropic bodies in parabolic-hyperbolic states, accounting for thermal effects (temperature). Computational algorithms were developed based on discrete analysis of the mathematical models, and specialized software was implemented in the C# programming language. Using the developed software, specific practical problems were numerically solved.

Keywords: parabolic, hyperbolic, isotropic, deformation, thermoplastic, explicit and implicit schemes, dynamic.

КУЧЛАНИШЛАРГА НИСБАТАН ҚЎЙИЛГАН ЭЛАСТИК БОҒЛИҚ МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ

Юсупов Юсуфбай Саиджонович¹ ва Рахматуллаева Гулшода Илҳом қизи²

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

E-mail: guliraxmatullayeva5@gmail.com

Аннотация. Параболик-гиперболик ҳолатдаги изотроп жисмларнинг деформацияланиш жараёнларини температурани ҳисобга олган ҳолда ифодалайдиган математик модел ва унга мос ҳисоблаш моделларини тузишга бағишланган. Математик моделларнинг дискрет анализлари асосида ҳисоблаш алгоритмлари қурилган ва C# тилида дастурий таъминоти яратилди. Дастурий таъминот асосида канкрет аниқ масалалар ечилди.

¹ ТКХУ Амалий информатика кафедраси доценти, ф.-м. ф. PhD, e-mail: yusabio@kiut.uz

² ЎзМУ Амалий математика ва интеллектуал технологиялар факультети магистранти

Калит сўзлар: параболик, гиперболик, изотроп, деформация, термопластик, ошкор ва ошкормас схемалар, динамик.

Кириш. Маълумки, $\Omega = \{a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq T^*\}$ соҳада изотроп стержень кўринишидаги қаттиқ жисмлар учун термопластик динамик боғлиқ масалалари биргаликдаги чизиксиз гиперболик турдаги ҳаракат тенгламаси[4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K_{21} \frac{\partial}{\partial x} (K_{22} \frac{\partial u}{\partial x}) + K_{23} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{24} u + K_{25} \frac{\partial T}{\partial x} + P \quad (1)$$

ва параболик турдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_{11} \frac{\partial}{\partial x} (K_{12} \frac{\partial T}{\partial x}) + K_{13} \frac{\partial T}{\partial x} + K_{14} T + K_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + Q \quad (2)$$

ёрдамида умумий кўринишда ифодаланиши мумкин. Бу ерда K_{ij} , P ва Q ҳадлар умуман олганда x, t, T ва u ларнинг чизиксиз функциялари бўлиб, хусусий ҳолларда ўзгармаслар сифатида аниқ кўринишларда берилади [1-2]. Масала моҳиятига кўра (1)-(2) кўринишдаги гипербола-параболик турдаги тенгламалар системасини ушбу бошланғич

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t_0} = \psi(x), \quad T|_{t=t_0} = \eta_0(x) \quad (3)$$

ва чегаравий шартлар

$$u|_{x=a} = \chi_1(t), \quad u|_{x=b} = \chi_2(t) \quad (4)$$

$$T|_{x=a} = \xi_1(t), \quad T|_{x=b} = \xi_2(t) \quad (5)$$

ёрдамида сонли ечиш алгоритми ва программасини яратиш билан бир қаторда баъзи бир итерацион сонли ечиш усуллари таҳлил қилиш кабилар кўзда тутилади. Бу ерда масала коррект қўйилган деб фараз қилинади. Масала маълум бир чизиксизликларни ҳам ҳисобга олган ҳолда умумий кўринишда ифодаланганлиги боис, тўр усулида итерацион ечиш усуллари қўллашга тўғри келади. Бунинг учун дастлаб берилган Ω соҳа Ox ўқи бўйича $h = (b-a)/(m-1)$ ва Ot ўқи бўйича $\tau = (T^* - t_0)/(n-1)$ қадамлар билан $x_i = a + (i-1)h$ ва $t_j = t_0 + (j-1)\tau$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) чизиклар ёрдамида дискретлаштириб олинади [3]. Масалада қатнашган барча ҳадларни чекли айирмали кўринишга ўтказиб олишда тенгламаларда қатнашаётган ва чизиксиз бўлиши кўзда тутилаётган

барча функцияларни чизиклаштиришнинг Пикар ёки Ньютон усулларидан фойдаланиб алмаштириш кўзда тутилади. Маълумки, бундай итерацион жараёнларнинг аниқ ечимга қанчалик тез ёки секин яқинлашиши эса танланаётган бошланғич яқинлашишларга[6], қўлланилаётган чизиклаштириш усулига ва ошкор ёки ошкормас схемалардан қайси бири қўлланилганига боғлиқ бўлади[7-9]. Одатда, тенгламалардаги K_{ij} коэффицентларни чизиксизлаштиришда вақт бўйича битта олдинги қатламдаги ҳисоблашлардан ёки Пикар усулидан фойдаланиш мумкин. Q ва P функцияларни эса чизиклаштиришнинг бевосита Ньютон усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Мана шуларга кўра стерженьдаги температура тарқалишини аниқлашни қуйидаги ошкор ва ошкормас схемалар ёрдамида ифодаланган

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = K_{11i}^j K_{12i+1}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h^2} - K_{12i}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h^2} + K_{13i}^j \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} +$$

$$+ K_{14i}^j T_i^j + K_{15i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h\tau} + Q_i^j + \mu_1 Q_{Ti}^j (T_i^{j+1} - T_i^j)$$

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = K_{11i}^j K_{12i+1}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h^2} - K_{12i}^j \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h^2} + K_{13i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} +$$

$$+ K_{14i}^j T_i^{j+1} + K_{15i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h\tau} + Q_i^j + \mu_1 Q_{Ti}^j (T_i^{j+1} - T_i^j)$$

тенгламалар системасига ва унинг таъсирида кўчишнинг ўзгаришини аниқлашни эса уч қатламли ошкор ва ошкормас схемалар ёрдамида ифодаланган[10-11]

$$\frac{u_i^{j+2} - 2u_i^{j+1} + u_i^j}{\tau^2} = K_{21i}^j K_{22i+1}^j \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h^2} - K_{22i}^j \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h^2} + K_{23i}^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} +$$

$$+ K_{24i}^j u_i^j + K_{25i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + P_i^j + \mu_2 P_{ui}^j (u_i^{j+2} - u_i^{j+1})$$

$$\frac{u_i^{j+2} - 2u_i^{j+1} + u_i^j}{\tau^2} = K_{21i}^j K_{22i+1}^j \frac{u_{i+1}^{j+2} - u_i^{j+2}}{h^2} - K_{22i}^j \frac{u_i^{j+2} - u_{i-1}^{j+2}}{h^2} + K_{23i}^j \frac{u_{i+1}^{j+2} - u_{i-1}^{j+2}}{2h} +$$

$$+ K_{24i}^j u_i^{j+2} + K_{25i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + P_i^j + \mu_2 P_{ui}^j (u_i^{j+2} - u_i^{j+1})$$

кўринишидаги тенгламалар системасини ечишга олиб келиш мумкин. Бу ерда μ_1 ва μ_2 параметрлар Q ва P ларни Пикар ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) ёки Ньютон ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) усуллари ёрдамида чизиклаштириш учун киритилган ($j = \overline{1, N-1}$; $i = \overline{1, m-1}$). Буларни соддалаштиргач, мос равишда

$$T_i^{j+1} = \tau \left(K_{11i}^j K_{12i+1}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h^2} - K_{12i}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h^2} + K_{13i}^j \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} + T_i^j \right) / (1 - \tau \mu_1 Q_{Ti}^j), \quad (10)$$

$$+ K_{14i}^j T_i^j + K_{15i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h\tau} + Q_i^j - \mu_1 Q_{Ti}^j T_i^j$$

$$A_1 T_{i-1}^{j+1} + C_1 T_i^{j+1} + B_1 T_{i+1}^{j+1} = D_1, \quad (11)$$

$$u_i^{j+2} = 2u_i^{j+1} - u_i^j + \tau^2 \left(K_{21i}^j K_{22i+1}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h^2} - K_{22i}^j \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + K_{23i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + \right. \\ \left. + K_{24i}^j u_i^j + K_{25i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + P_i^j - \mu_2 P_{ui}^j u_i^{j+1} \right) / (1 - \mu_2 \tau^2 P_{ui}^j), \quad (12)$$

$$A_2 u_{i-1}^{j+2} + B_2 u_i^{j+2} + C_2 u_{i+1}^{j+2} = D_2 \quad (13)$$

кўринишдаги ҳисоблаш формулаларига эга бўламиз. Натижавий ҳисоблашларни (10)-(13) тенгламаларнинг $\{T_i^{j+1}; u_i^{j+2}\}$ жуфтлик кўринишидаги комбинацияларидан ҳосил бўладиган қуйидаги тўртта вариантда амалга ошириш мумкин [12-14]. Буларнинг орасидан самаралисини танлаб олиш эса, фақатгина бирор муайян, қолаверса аниқ ечими маълум бўлган тест масаласи ёрдамидагина амалга оширилиши мумкин:

1-Вариант:	(10)	2-Вариант:	(10)	3-Вариант:	(11)	4-Вариант:	(11)
	(12)		(13)		(12)		(13)

Барча $\{T_i^{j+1}; u_i^{j+2}\}$ жуфтликлар системаси кўринишидаги вариантлар юқорида

берилган (3)-(5) шартлар: $T_i^1 = \eta_0(x_i)$, $T_1^j = \xi_1(t_j)$, $T_m^j = \xi_2(t_j)$, $u_i^1 = \varphi(x_i)$,

$\frac{u_i^2 - u_i^1}{\tau} = \psi(x_i)$, $u_1^j = \chi_1(t_j)$, $u_m^j = \chi_2(t_j)$ ёрдамида ечилади. Бу ерда A_s, B_s, C_s, D_s -

коэффициентлар (7) ва (9) тенгламалардан аниқланади ($s=1,2$);

$K_{11i}^j = K_{11}(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $K_{12i}^j = K_{12}(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, ..., $K_{25i+1}^j = K_{25}(x_{i+1}, t_j, T_{i+1}^j, u_{i+1}^j)$,

$P_i^j = P(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $Q_i^j = Q(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $P_{ui}^j = P_u(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $Q_{Ti}^j = Q_T(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$ - берилади.

Тест масаласи. Тест масаласи сифатида (1)-(5) масалада берилганларнинг ушбу $K_{11}=K_{12}=1$, $K_{13}=K_{14}=0$, $K_{15}=T^{n_1}$, $K_{21}=K_{22}=1$, $K_{23}=K_{24}=0$, $K_{25}=T^{n_2}$, $Q=T(T^{n_1-1}u-2)$, $Q_T=T^{n_1-1}u-2$, $P=T^{n_2+1}$, $P'_u=0$, $\chi_2(t)=\sin(1+t)$, $\xi_1(t)=e^{-t}$, $\xi_2(t)=e^{-(1+t)}$ қийматларида аниқ ечимлари $T(x,t)=e^{-(x+t)}$ ва $u(x,t)=\sin(x+t)$ кўринишда маълум бўлган ҳол учун ҳисоблаш экспериментлари ўтказилди. Бунда Ω соҳани ўзгармас қадамли дискрет соҳага келтириш учун $a=0$, $b=1$, $t_0=0$, $T^*=1$, $m=n=10$, $n_1=4$, $n_2=2$ ва вақт бўйича қатламлар орасидаги чизиклаштириш усулларида фойдаланишда итерацион жараённинг яқинлашиши учун аниқликни $\varepsilon=0.001$ деб олинди. Жумладан, 3-вариант ёрдамида олиб борилган ҳисоблашларда итерацион жараёндаги итерациялар сони 3 тадан ошмади. P ва Q функцияларни Ньютон усулида чизиклаштирилганда ($\mu_1=\mu_2=1$) нисбий хатоликларнинг максимал қиймати 1.58 дан, Пикар усулида ($\mu_1=\mu_2=0$) эса 2.08 дан ошмайди. Чизиксиз ҳадларни бевосита вақт бўйича олдинги қатламда ҳисоблаш орқали ҳам чизиклаштириш мумкин. Бу усулда олинган натижалар Пикар усулида олинган натижалар билан бир хил бўлиб, Ньютон усулида олинган натижаларнинг эса яхшироқ эканлигини айтиб ўтиш лозим. Ҳисоблаш экспериментларининг натижалари қуйидаги 1-2 жадвалларда Ω соҳанинг $x=0.222, 0.556, 0.889$; $t=0.222, 0.556$ қийматларида масаланинг аниқ ечими билан чизиклаштиришнинг ҳар хил усуллари ёрдамида олинган тақрибий ечимлар, ҳамда улар орасидаги абсолют ва нисбий хатоликлар келтирилади.

1-жадвал.

t/x	U(x,t)	0.222	0.556	0.889
0.222	Аниқ ечим (U)	0.4300	0.7017	0.8962
	Тақр.ечим: Ньютон усули (U _Н)	0.4331	0.7085	0.9007
	Тақр.ечим: Пикар усули (U _П)	0.4330	0.7085	0.9007
	Тақр.ечим: Вақт бўйича (U _В)	0.4330	0.7085	0.9007
	$\Delta U_H = U - U_H $ Ньютон усулида	0.0031	0.0068	0.0045

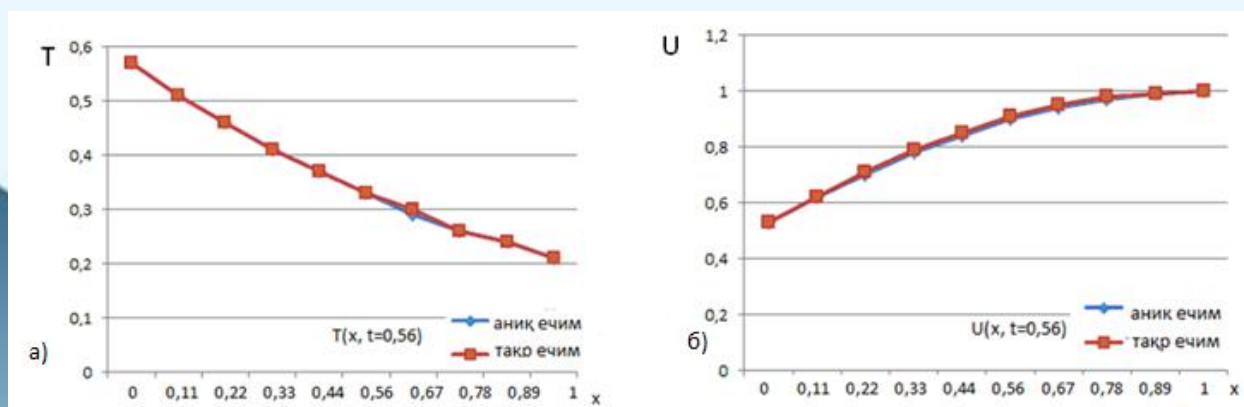
	$\Delta U_{\Pi} = U - U_{\Pi} $ Пикар усулида	0.0030	0.0068	0.0045
	$\Delta U_{\text{В}} = U - U_{\text{В}} $ Вақт бўйича	0.0030	0.0068	0.0045
	$ \Delta U_{\text{Н}} / U $ (%) Ньютон усулида	0.7279	0.9763	0.5008
	$ \Delta U_{\Pi} / U $ (%) Пикар усулида	0.7010	0.9756	0.5039
	$ \Delta U_{\text{В}} / U $ (%) Вақт бўйича	0.7010	0.9756	0.5039
0.556	Аниқ ечим (U)	0.7017	0.8962	0.9920
	Тақр.ечим: Ньютон усули ($U_{\text{Н}}$)	0.7085	0.9073	0.9949
	Тақр.ечим: Пикар усули (U_{Π})	0.7080	0.9071	0.9949
	Тақр.ечим: Вақт бўйича ($U_{\text{В}}$)	0.7080	0.9071	0.9949
	$\Delta U_{\text{Н}} = U - U_{\text{Н}} $ Ньютон усулида	0.0068	0.0111	0.0045
	$\Delta U_{\Pi} = U - U_{\Pi} $ Пикар усулида	0.0063	0.0109	0.0045
	$\Delta U_{\text{В}} = U - U_{\text{В}} $ Вақт бўйича	0.0063	0.0109	0.0045
	$ \Delta U_{\text{Н}} / U $ (%) Ньютон усулида	0.9737	1.5763	0.2877
	$ \Delta U_{\Pi} / U $ (%) Пикар усулида	0.8994	1.5510	0.2919
	$ \Delta U_{\text{В}} / U $ (%) Вақт бўйича	0.8994	1.5510	0.2919

2-жадвал.

t/x	T(x,t)	0.222	0.556	0.889
0.222	Аниқ ечим (T)	0.6412	0.4594	0.3292
	Тақр.ечим: Ньютон усули ($T_{\text{Н}}$)	0.6409	0.4595	0.3293
	Тақр.ечим: Пикар усули (T_{Π})	0.6343	0.4512	0.3262
	Тақр.ечим: Вақт бўйича ($T_{\text{В}}$)	0.6343	0.4512	0.3262
	$\Delta T_{\text{Н}} = T - T_{\text{Н}} $ Ньютон усулида	0.0003	0.0001	0.0001
	$\Delta T_{\Pi} = T - T_{\Pi} $ Пикар усулида	0.0069	0.0082	0.0030
	$\Delta T_{\text{В}} = T - T_{\text{В}} $ Вақт бўйича	0.0069	0.0082	0.0030
	$ \Delta T_{\text{Н}} / T $ (%) Ньютон усулида	0.0441	0.0146	0.0416
	$ \Delta T_{\Pi} / T $ (%) Пикар	1.0731	1.7916	0.9161

	усулида			
	$ \Delta T_B/T (\%)$ Вақт бўйича	1.0731	1.7916	0.9161
0.556	Аниқ ечим (Т)	0.4594	0.3292	0.2359
	Тақр.ечим: Ньютон усули (Т _Н)	0.4598	0.3300	0.2363
	Тақр.ечим: Пикар усули (Т _П)	0.4539	0.3222	0.2334
	Тақр.ечим: Вақт бўйича (Т _В)	0.4539	0.3222	0.2334
	$\Delta T_N = T - T_N $ Ньютон усулида	0.0004	0.0008	0.0001
	$\Delta T_P = T - T_P $ Пикар усулида	0.0056	0.0069	0.0030
	$\Delta T_B = T - T_B $ Вақт бўйича	0.0056	0.0069	0.0030
	$ \Delta T_N/T (\%)$ Ньютон усулида	0.0907	0.1651	0.1621
	$ \Delta T_P/T (\%)$ Пикар усулида	1.2098	1.5122	1.0515
	$ \Delta T_B/T (\%)$ Вақт бўйича	1.2098	1.5122	1.0515

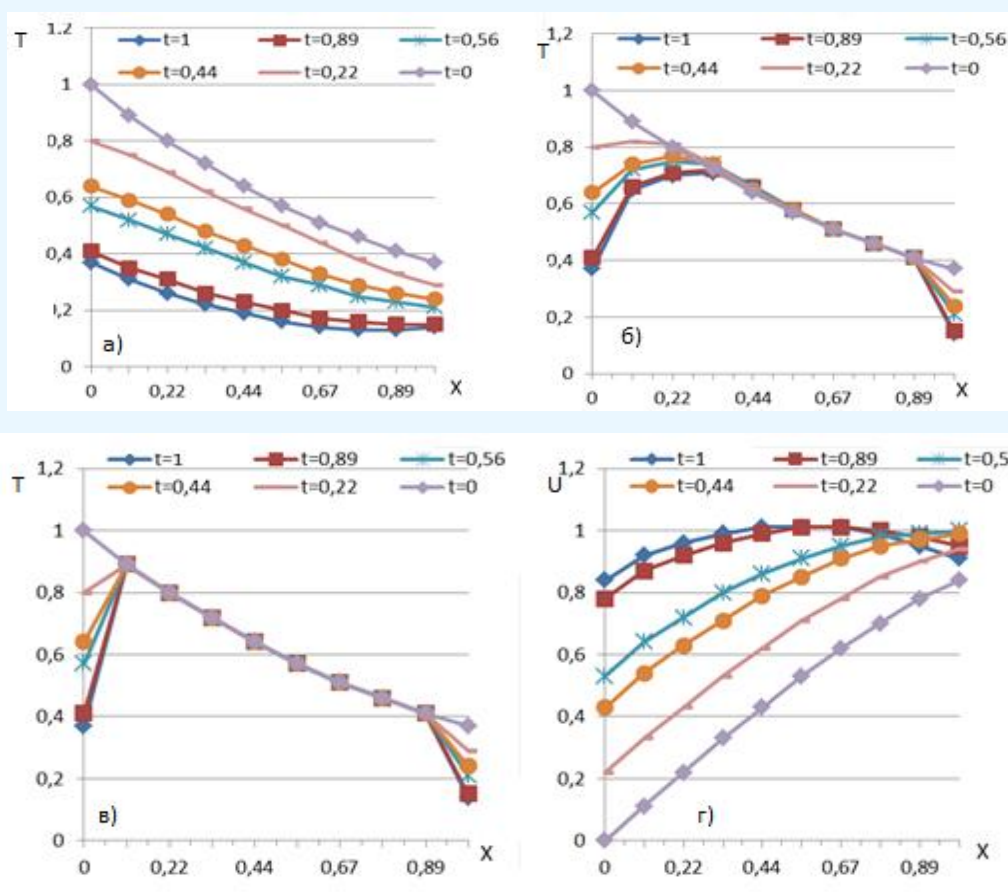
Қуйидаги расмларда (1)-(5) масалани чизиқсиз тест масаласида ечиш учун Ньютон усули қўлланилгандаги, вариантлардан энг самаралиси бўлган 3-вариант ёрдамида олинган сонли ва аниқ ечимларнинг графиклари тасвирланган. Графикларнинг устма-уст тушаётганлиги қўлланилаётган усулнинг яхшилигини, шунга мос алгоритм ва программанинг эса тўғрилигини тасдиқлайди.



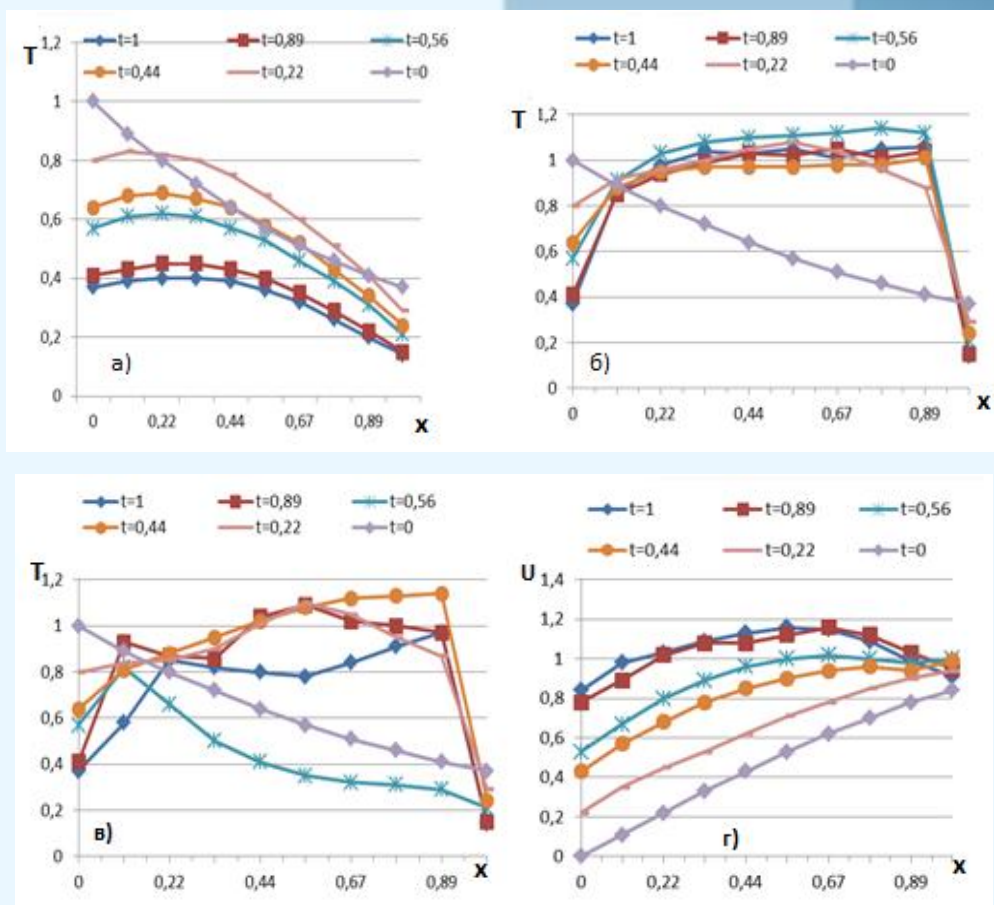
1-расм. Фиксирланган $t=0.56$ вақтдаги: а) температуранинг. б) кўчишнинг Ox ўқи бўйича аниқ ва тақрибий ечимларнинг ўзгариш графиклари.

Мана шуларга асосланиб, юқорида келтирилган тест масаласи учун иссиқлик манбаси сифатида қатнашаётган Q функциянинг $Q=0$ ва $Q=e^T$

бўлган ҳолларида тенгламаларда n_1 ва n_2 - даражали кўринишларда берилган чизиқсиз коэффицентлар ($K_{15} = T^{n_1}$ ва $K_{25} = T^{n_2}$) нинг сонли ечимларга таъсирини ўрганиш бўйича ҳисоблаш экспериментлари олиб борилди. Жумладан, $n_2 = 2$ ўзгармас деб, n_1 нинг 0 дан бошлаб, то 126 гача бўлган қийматларида олинган сонли натижаларнинг ўзгаришлари 2- ва 3-расмларда график кўринишларда келтирилган. Хусусан, $Q = 0$ бўлганда температура функциясининг ҳар хил вақтлардаги ($t = 0; 0.22; 0.44; 0.56; 0.89; 1$) графиклари (3) - бошланғич шартдаги $\eta_0(x)$ функциясининг графигидан пастда жойлашиши, $\eta_0(x)$ нинг температура учун юқори ечим сифатида қаралиши мумкинлигини кўрсатади. Кўчиш функцияси учун эса аксинча, яъни кўчиш функциясининг графиклари (3)-бошланғич шартдаги $\varphi(x)$ функциясининг графигидан юқорида жойлашиши кузатилди. Бу эса $\varphi(x)$ нинг кўчиш функцияси учун қуйи ечим сифатида олиниши мумкинлигини намоён қилади. Манба функциясининг ўзгариши $Q = e^T$ кўринишида бўлганда эса, температура ўзгариши бўйича ўзига хос ҳолатларни кузатиш мумкин, лекин кўчиш функциясида бундай кескин ўзгаришлар кузатилмади (3-расм).



2-расм. Тенгламада $Q=0$ ҳол учун температуранинг а) $n1=0$; б) $n1=10$; в) $n1=126$ ва кўчишнинг г) $n1=126$ ўзгариши графиклари.



3-расм. Тенгламада $Q=e^T$ ҳол учун температуранинг а) $n1=0$; б) $n1=10$; в) $n1=16$ ва кўчишнинг г) $n1=16$ ўзгариши графиклари.

Хулоса қилиб айтганда, (1)-(5) кўринишдаги масалаларни сонли ечиш учун тавсия қилинаётган алгоритм варианты, шу асосида яратилган программалар мажмуаси ва олинган натижалар муайян кўринишдаги чизиқсиз амалий масалаларни ечиш учун методик кўрсатма бўлиб хизмат қилиши мумкин.

АДАБИЁТЛАР

1. Khaldjigitov, A. A., Kalandarov, A. A., & Yusupov, Y. S. (2019). Coupled problems of thermoelasticity and thermoplasticity. *T. "Fan va texnologiya"*, 203.
2. Yusupov, Y. S. (2022). Numerical Solution of a TwoDimensional Dynamic Related Problem of Thermal Support. *Eurasian Journal of Engineering and Technology*, 5, 125-134.

3. Khaldjigitov, A. A., Yusupov, Y. S., Khudazarov, R. S., & Sagdullaeva, D. A. (2019). On the thermoplasticity constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials. *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD)*, 9(4), 467-478.
4. Khaldjigitov, A. A., Yusupov, Y. S., Rasedee, A. F. N., & Long, N. N. (2019, April). Mathematical modeling and simulation of the coupled strain space thermoplasticity problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1212, No. 1, p. 012023). IOP Publishing.
5. Юсупов, Ю. С. (2019). Численное решение связанной динамической термоупругопластической задачи, основанной на деформационной теории. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, (4 (22)), 101-110.
6. Saidjonovich, Yusupov Yusufbay, and Babadjanov Mumin Radjapovich. "Numerical solution of a Three-Dimensional Coupled thermoplastic problem based on deformation theory" *The International Journal of Science & Technoledge* 7.9 (2019).
7. Халджигитов А.А., Юсупов Ю.С., & Адамбаев У.Э. (2019). Численное моделирование связанной двумерной динамической задачи термопластичности. *Вестник Илм сарчаималари*, (11), 12-15.
8. Yusupov, Y., & Khaldjigitov, A. A. (2017). Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoplastic problem. *Universal Journal of Computational Mathematics*, 5(2), 34-43.
9. Юсупов Ю. С., Хасанов К. А. Численное решение одномерной термопластической задачи для изотропных тел //Управление инновациями: теория, методология, практика. – 2014. – №. 11. – С. 131-138.
10. Юсупов Ю. С., Хужакулов Ш. А., Худаяров Ш. Ш. Численное решение двухмерной связанной термопластической задачи основанной на деформационной теории //Управление инновациями: теория, методология, практика. – 2014. – №. 11. – С. 138-144.
11. Yusupov Y. S., Khaldjigitov A. A. Numerical solution of the coupled dynamic problems based on the deformation and flow thermoplasticity theories.

12. Khaldjigitov, A. A., Qalandarov, A. A., Yusupov, Y. S., & Sagdullaeva, D. A. (2013). Numerical modelling of the 1D thermoplastic coupled problem for isotropic materials. *Acta TUIT*, 1.
13. Yusupov, Yu S. "Numerical Solution of a TwoDimensional Dynamic Related Problem of Thermal Support." *Eurasian Journal of Engineering and Technology* 5 (2022): 125-134.
14. Ю.С. Юсупов; С.А. Абдувоитов. Математическое и численное решение двумерной связанной задачи термоупругости на основе деформацион теории. *Peri. Jour. of Mode. Phil. Soci. Scie. and Huma.* **2022**, 11, 189-199.
15. A. A. Khaldjigitov, Yu. S. Yusupov, U. E. Adambaev, and D. A. Sagdullaeva, "Numerical solution of two-dimensional coupled thermoplastic problems", AIP Conference Proceedings 2637, 040007 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0118532>
16. Y.S. Yusupov and Ch.M. Xolmatova, "Numerical modelling of the one-dimensional thermoplastic coupled problem for isotropic materials using deformation theory", *Euro.Jour.Eng. Tech*, vol. 15, pp. 71–77, Feb. 2023.