

NUMBER GROUPS CHARACTERISTICS

Usubjonov Adxamjon Axadjon o'g'li, NamSU, teacher.

Xodjiyev Bahodir G'ulomovich, NamSU, teacher.

Annotation. This article is devoted to the study of algorithmic properties of numbered groups from classical systems. Some properties of group, numbered algebra, negative algebra, and positive algebra are considered. The purpose of this article is to provide a complete classification of numbered groups and countable separation groups.

Keywords: Group, numbered group, divisible group, negative algebra and positive algebra.

NOMERLANGAN GRUPPALARNING XARAKTERISTIKASI

Usubjonov Adxamjon Axadjon o'g'li, NamDU, o'qituvchi.

Xodjiyev Bahodir G'ulomovich, NamDU, o'qituvchi.

Annotatsiya. Ushbu maqola klassik sistemalardan bo'lgan nomerlangan gruppalarining algoritmik xossalarini o'rganishga bag'ishlangan. Bunda grupp, nomerlangan algebra, negativ algebra va pozitiv algebralarning ba'zi xossalari qaralgan. Ushbu maqolaning maqsadi, nomerlangan grupp va hisoblanuvchi ajraluvchi gruppalarni to'liq tasniflashdir.

Kalit so'zlar: grupp, nomerlangan grupp, hisoblanuvchi ajraluvchi grupp, negativ algebra va pozitiv algebra.

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОМЕРНЫХ ГРУПП

Усубжонов Адхамжон Ахаджон ўгли, НамГУ, Учитель.

Ходжиев Баходир Гуломович, НамГУ, Учитель.

Аннотация. Данная статья посвящена изучению алгоритмических свойств нумерованных групп из классических систем. Рассмотрены некоторые свойства группы, нумерованной алгебры, отрицательной алгебры и положительной алгебры. Цель этой статьи-дать полную классификацию нумерованных групп и счетных разделительных групп.

Ключевые слова: Группа, нумерованная группа, вычислимо отделимых, отрицательная алгебра и положительная алгебра.

1.Kirish.

N.X.Qosimov[3] ishlarida hisoblanuvchi ravishda ajralib turadigan algebralarning eng umumiy effektiv, strukturaviy va topologik xususiyatlari o'rganilib, bunday algebralarning eng muhim turlari bayon qilingan. Ko'p sonli algebralarning tabiiy va muhim turlari hisoblanuvchi ravishda ajralib turadigan bo'lib chiqdi, shu jumladan aniq bo'lmaganlar orasida negativ algebralar, hisoblanadigan muvofiqlik panjaralari bilan pozitiv algebralar, qoldiq sonli algebralar. Negativ nomerlash va pozitiv algebralar A.I.Maltsev[1], Yu.L.Yershov, A.S.Morozov, S.P.Odintsov va V.L.Selivanov tomonidan har xil nuqtai nazardan o'rganilgan. Ushbu maqolada , nomerlangan grupp va hisoblanuvchi-ajraluvchi gruppalar to'liq o'rganilgan.

2.Asosiy ta'rif va tushunchalar.

Ta'rif-1. Bo'sh bo'lmagan G to'plam va unda aniqlangan $*$ binar amalga nisbatan quyidagi aksiomalar

$$(G1) \quad \forall a, b, c \in G \text{ uchun } (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(G2) \quad \forall a \in G, \exists e \in G \text{ uchun } e * a = a * e = a$$

$$(G3) \quad \forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ uchun } a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

bajarilsa, $(G, *)$ tartiblangan juftlikka grupp deyiladi.

Ta'rif-2.[3] Bizga berilgan “ $*$ ” binar amal aniqlangan G grupp va $\nu: \omega \rightarrow G$ akslantirish uchun shunday f hisoblanuvchi funksiya topilib

$$\nu n * \nu m = \nu(f(n, m))$$

tenglik o'rinli bo'lsa, (G, ν) juftlikka *nomerlangan grupp* deyiladi.

Ta'rif-3.[3] Agar ν nomeratsiya negativ (pozitiv, hisoblanuvchi) bo'lsa u holda (G, ν) nomerlangan grupp *negativ (pozitiv, hisoblanuvchi)* deyiladi.

Ta'rif-4.[3] ν nomeratsiya *pozitiv (negativ)* deyiladi, agar $\eta_\nu (\omega^2 \setminus \eta_\nu)$ hisoblanuvchi sanaluvchi bo'lsa.

3.Nomerlangan gruppalarining algoritmik tavsiri.

Ta'rif-5.[3] ν nomeratsiya yechilgan deyiladi, agar η_ν munosabat hisoblanuvchi bo'lsa.

Nomerlangan ekivalentlik $\eta = \{ \langle x, y \rangle / \nu x = \nu y \}$.

Ta'rif-6.[4] Agar nomerlangan ekivalentlik hisoblanuvchi ajraluvchi bo'lsa, nomerlangan grupp *hisoblanuvchi ajraluvchi* deyiladi.

Quyidagi teorema shuni ko'rsatadiki, negativ gruppalar hisoblanuvchi ajraluvchi gruppalarining sodda bo'lmagan misollari hisoblanadi.

Teorema-1. Har qanday (G, ν) negativ grupp *hisoblanuvchi ajratiluvchi nomerlangan grupp* bo'ladi.

Isboti. η_ν nomerlangan ekivalentlikni ν yopilma operatorini, $[\]_\nu$ orqali belgilaymiz. Ya'ni $[\alpha]_\nu$ operator ν - yopiq to'plamni o'z ichiga oladigan eng kichik to'plam va u α ni o'z ichiga oladi. Shuni aytishimiz mumkinki, α to'plam z raqamni rad etsa, agar $Z [\alpha]_\nu$ bo'lsa, ya'ni $\nu z \nu a$ va ixtiyoriy $a \in \alpha$. $\nu a \nu b$ bizga berilgan bo'lsin, ν - yopiq, hisoblanuvchi α to'plamni, ya'ni α ni b dan ajratuvchini quyidagicha hosil qilamiz:

$$0\text{-qadam: } \alpha^0 = \{a\}, \beta^0 = \{b\}$$

$$1\text{-qadam: } \nu 0 \nu a, \beta^1 = \beta^0 \cup \{0\}, \alpha^1 = \alpha^0;$$

$$\nu 0 \nu b, \alpha^1 = \alpha^0 \cup \{0\}, \beta^1 = \beta^0 \cup \{0\}.$$

$e+1$ -qadam: Biz $\alpha^e \beta^e$ ga tegishli bo'lmagan birinchi $z \in \omega$ ni tanlaymiz va tekshirishni boshlaymiz «ushbu to'plamlarning har biri z tomonidan rad etilganligini». Agar z tomonidan α^e rad etilsa, u holda bilamizki

$$\alpha^{e+1} = \alpha^e, \beta^{e+1} = \beta^e \cup \{z\}.$$

Agar z tomonidan $\beta^e \cup \alpha^{e+1} = \alpha^e \cup \{z\}$ rad etilsa, agar unday bo'lmasa, u holda z tomonidan α^e va $\alpha^{e+1} = \alpha^e \cup \beta^{e+1} = \beta^e \cup \{z\}$ rad etiladi. Ya'ni ν ni negativligidan « z tomonidan α^e (yoki β^e) rad etilishi» hisoblanuvchi sanaluvchi munosabat.

$$\alpha = \bigcup_{e=0} \alpha^e, \beta = \bigcup_{e=0} \beta^e$$

deb hisoblaylik.

Agar hisoblanuvchi ravishda sanaluvchi to'planning to'ldiruvchisi ham hisoblanuvchi ravishda sanaluvchi to'plam bo'lsa, u holda to'plam hisoblanuvchidir. Shunday qilib bunda $\alpha \beta = \omega$, α hisoblanuvchi sanaluvchi va β ham hisoblanuvchi sanaluvchi. U holda bu to'plam hisoblanuvchi deyiladi.

Endi tekshiramiz, ya'ni α ni ν - yopiqqligini. $u \alpha$ va $\nu\nu = \nu u$ lar berilgan, agar $u < \nu$ bo'lsa, u holda qandaydir e uchun $u \alpha^e$, $\nu \alpha^e \beta^e$ bo'ladi. U holda α to'plamni keyingi bironta qadamda ν rad qilmaydi. Bu esa shuni bildiradiki qandaydir $e^1 > e$ qadamda β^e to'plam ν tomonidan rad etiladi. Ya'ni $\nu \alpha$. agar $\nu < u$ bo'lsa u holda $\nu \alpha$ bo'ladi. Teskari holda α^e tomonidan rad etilmay qoladi, bundan $u \alpha^e$. Bu ziddiyat. Demak α ham ν - yopiq hisoblanuvchi to'plam hisoblanadi. Teorema isbotlandi.

Ushbu teorema hisoblanuvchi ravishda ajratiladigan gruppalarni harakterlash uchun kalit beradi.

Endi biz nomerlangan negativ gruppalar uchun, negativ gomomorfik tasvir mavjudligini ko'rsatamiz.

Lemma-1. $T(a, b)$ eng kichik kongurensiya bo'lsa, $\langle a, b \rangle$ juftlikni o'z ichiga oladi.

Isbot. Bu atamalarining murakkabligini induksiya bilan isbotlash oson. Qaysiki $\langle a, b \rangle$ ni o'z ichiga olgan ixtiyoriy kongurensiyani o'zida saqllovchi $T(a, b)$ ni.

Bizga n o'rinli f - amal berilgan bo'lsin va $\langle a_i, b_i \rangle \in T(a, b)$ uchun $0 \leq i \leq n$. U holda shunday $e_1, \dots, e_n$ transversiya mavjudki $e_i(a) = a_i$, $e_i(b) = b_i$. Va transversiya e ni orqali belgilaymiz $f(e_1(x), \dots, e_n(x))$. Ta'rifga ko'ra $\langle e(a), e(b) \rangle \in T(a, b)$ tegishli bo'ladi. Ya'ni $T(a, b)$ kongurensiya bo'ladi.

Lemma isbot bo'ldi.

Bizga G gruppadagi asosiy to'plamnig A_0, A_1 bo'laklashlari bo'lsin, ya'ni

$$A_0 \cup A_1 = |A|, \quad A_0 \cap A_1 = \emptyset.$$

Endi $\theta(A_0, A_1)$ kongurensiyalar to'plamini ko'rib chiqamiz, A_0 to'plamni biron-bir elementi A_1 to'plamni biron bir elementi bilan kesishmaydi. Ya'ni

$$\theta^1 \theta(A_0, A_1) \quad \forall xy(x \in A_0 \& y \in A_1 \rightarrow x \neq y \pmod{\theta}).$$

Lemma-2. $a \equiv b \pmod{\theta^*}$ bo'lishi uchun T da shunday e transversiya mavjud bo'lishi zarur va yetarli. Ya'ni e uchun $e(a) \in A_0 \& e(b) \in A_1$ yoki $e(a) \in A_1 \& e(b) \in A_0$ bajarilsin.

Isbot. $a \equiv b \pmod{\theta^*}$ tenglik berilgan. U holda $T(a, b)$ lemma-1. ga ko'ra $\theta(A_0, A_1)$ ning elementi bo'ladi, ya'ni

$$T(a, b) \cap (A_0, A_1) = \emptyset.$$

Endi $a \equiv b \pmod{\theta^*}$ deb hisoblaylik. θ^* kongurensiya $\theta(A_0, A_1)$ dagi eng kattasi bo'lsa, bundan kelib chiqadiki ixtiyoriy $\theta(A_0, A_1)$ kongurensiyani moduli bo'yicha $a \equiv b$ bo'ladi. Shu tufayli ham

$$T(a, b) \subseteq \theta(A_0, A_1),$$

ya'ni

$$T(a, b) \cap (A_0, A_1) = \emptyset.$$

Lemma isbot bo'ldi.

Teorema-2. Barcha negativ ekivalentliklar hisoblanivchi-ajraluvchi bo'ladi.

Isbot: $[\]_\eta$ operator orqali η - yopiqlikni belgilaymiz, ya'ni bunda $[\alpha]_\eta$ bo'ladi. η yopiq to'plam α to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik to'plamdir. Shuni aytishimiz mumkinki, z natural son rad etilsa α to'plamdan, ya'ni $z \in [\alpha]_\eta$.

Bizga chekli to'plamlarning $\delta_0, \delta_1, \dots$ kuchli sanaluvchi to'plamlar ketma-ketligi berilga bo'lsin. Bilish qiyin emaski η ning negativligidan « z rad etilsa δ_n tomonidan» ushbu munosabat hisoblanuvchi sanaluvchi hisoblanadi va bu z va n

ga bo'g'liqdir. $x \equiv y \pmod{\eta}$ deb hisoblaylik. Ikkita to'plam - α, β ni quramiz quyidagi protseduraga ko'ra:

$$0\text{-qadam.} \quad \alpha^0 = \{x\} \quad \beta^0 = \{y\}$$

$e+1$ -qadam. Eng kichik z ni tanlaymiz va u α^e β^e ga tegishli bo'lmasin, so'ngra z ni har bir to'plamda rad etilishini tekshirishni boshlaymiz. Agar z rad etilsa α^e to'plamdan, u holda quyidagicha deb hisoblaymiz,

$$\alpha^{e+1} = \alpha^e, \quad \beta^{e+1} = \beta^e \cup \{z\}.$$

Agar z rad etilsa β^e to'plamdan, u holda quyidagicha deb hisoblaymiz,

$$\alpha^{e+1} = \alpha^e \cup \{z\}, \quad \beta^{e+1} = \beta^e.$$

$e+1$ - oxirgi qadam.

Biz ko'rsatdikki, har bir e qadamimiz z ni ikkovidan biriga α^e yoki β^e tegishli ekanligi bilan yakunlanadi. Bundan kelib chiqadiki α^e va β^e lar ixtiyoriy e uchun aniqlangan. Mayli $\alpha = \bigcup_{e=0} \alpha^e$, $\beta = \bigcup_{e=0} \beta^e$ lar bo'lsin. z ning bu to'plamlardan qaysi

biriga tegishligidan $\alpha \cap \beta = \omega$ kelib chiqadi. Ihtiyoriy e uchun $\alpha^e \cap \beta^e =$

kesishma bo'sh to'plamligidan $\alpha \cap \beta = \omega$ kesishma to'plamning bo'sh to'plam bo'lishi kelib chiqadi. Quyidagini tekshirishimiz qoldi, ya'ni α (β) ni η - yopiq ekanligini tekshirish yetarli. $u \in \alpha$ va $u \equiv v \pmod{\eta}$ berilgan bo'lsin. Agar $u < v$ bo'lsa, u holda qandaydir e uchun $u \in \alpha^e$, $v \in \alpha^e \cup \beta^e$ ga ega bo'lamiz. U holda v rad etilmaydi α to'plam tomonidan hech bir qadamda. Demak v rad etiladi β tomonidan qandaydir qadamda, ya'ni $e^1 > e$ va $v \in \alpha^{e^1}$. Agar $u > v$ bo'lsa, bundan $v \in \alpha$ bo'ladi, sababi α to'plam tomonidan rad etilmadi, aks holda $u \in \alpha$ bo'ladi.

Bu esa ziddiyat.

Xulosa, $\alpha \cap \beta = \omega$ - yopiq hisoblanuvchi to'plamdir, x ni y dan ajratadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Endi asosiy teoremlarni ketirib o'tamiz.

Teorema-3. Nomerlangan gruppaga hisoblanuvchi-ajraluvchi bo'lishi uchun negativ gruppaga approksimatsiyalanishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Bizga (G, ν) - hisoblanuvchi-ajraluvchi nomerlangan gruppaga berilgan bo'lsin. G gruppada amal ν nomeratsiyani saqlasin. Endi biz transversiya deb $\lambda x.e(x, a)$ shunday bir o'rinli hisoblanuvchi funksiyaga aytiladiki. Bu yerda e - termal amaldir, unda har bir belgi F dan olingan hisoblanuvchi funksiyalar bilan izohlanadi, G gruppada mos keluvchi amallarni o'z ichiga oladi. $a_1 a$ ihtiyoriy bo'lgan natural sonlar juftligi. Ko'rinib turibdiki, barcha transversiyalar to'plami hisoblanuvchidir.

Bizga $\nu m \ \nu n$ berilgan bo'lsin, u holda shartga ko'ra ν - yopiq hisoblanuvchi α to'plam mavjud bo'ladiki, bunda $m \in \alpha$, $m \in \omega \setminus \alpha$. Bizga $A_0 = \nu \alpha$, $A_1 = \nu(\omega \setminus \alpha)$ berilgan bo'lsin. Oldingi lemmalarni ko'rib chiqqan holda $\theta(A_0, A_1)$ to'plamdagi eng katta θ^* kongurensiyani qaraymiz. Ko'rsatamizki, aynan θ^* negativ kongurensiya borligini, qaysiki G gruppasi moduli har hil bo'ladigan νm va νn elementlarini.

$$\sigma = \{ \langle x, y \rangle / \exists e \in T, e(x) \& e(y) \in \omega \setminus \alpha \ \vee \ e(x) \in \omega \setminus \alpha \& e(y) \in \alpha \}$$

to'plamni ko'rib chiqamiz. Lemma-2. ga binoan bizda mavjud:

$$\nu x \equiv \nu y \pmod{\theta^*} \iff \langle x, y \rangle \in \sigma.$$

Shunday qilib $\nu m, \nu n$ elementlar negativ θ^* kongurensiya orqali ajratiladi. Aksincha, bizga berilgan nomerlangan (G, ν) gruppaga negativ gruppaga yaqinlashsin. Agar $\nu m \ \nu n$ bo'lsa, shartga ko'ra shunday negativ (G_1, μ) gruppaga mavjud bo'ladiki, gomomorfizm $\varphi: G \rightarrow G_1$ va hisoblanuvchi funksiya f mavjud bo'ladiki, bunda $\varphi \nu m = \varphi \nu n$, $\varphi \nu = \mu f$. Mayli μ - yopiq α hisoblanuvchi to'plam mavjud bo'lsin va u $f(m)$ ni $f(n)$ dan ajratsin. U holda $f^{-1}(\alpha)$ to'plam ν - yopiq hisoblanuvchi to'plam bo'ladi va m ni n dan ajratadi. Teorema isbot bo'ldi.

Foydanilgan adabiyotlar

1. Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I. // УМН. – 1961. – Т. 16. – №3 С. 3–60.

2. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.
– М.: Мир, 1972. – 624 с.
3. Касымов Н.Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // УМН. -
1996. – Т.51. – №3 – С. 145–176.
4. Ибрагимов Ф.Н. К теории рекурсивно отделимых моделях. // Вестник
НУУз. – 2006. – №2. – С. 23 – 27.